

# MAT207 METRİK UZAYLAR I 1. ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:.....CEVAP ANAHTARI.....

12.11.2001

No :.....

**Soru 1)** Boş olmayan bir  $X$  kümesi üzerinde kaç tane metrik tanımlanabilir? Açıklayarak yazınız.(20 puan)

Boş olmayan her küme üzerinde en az bir metrik tanımlanabilir (örneğin ayrık metrik). Yine biliyoruz ki bir  $X$  kümesi üzerinde bir  $d$  metriği verildiğinde bundan faydalanarak yeni bir metrik daha elde edebiliriz (örneğin  $\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$  yardımıyla).

Bu işlem her bir metrik bir başka metrik vereceğinden istenildiği kadar devam ettirilebilir. Yani boş olmayan her küme üzerinde sonsuz çoklukta metrik tanımlanabilir.

**Soru 2)** Boş olmayan bir  $X$  kümesi üzerinde kaç tane sınırlı metrik olabilir? Açıklayarak yazınız. (20 puan)

$d$ ,  $X$  üzerinde herhangi bir metrik olsun (üstteki soru gereği mevcut).  $\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$  metriği  $d$  metriğinden elde edildiğinden ve  $\delta$  metriği 0 ile 1 arasında değerler aldığı için sınırlı olduğundan bu yöntemle elde edilecek her bir metrik te sınırlı olacaktır. Yani boş olmayan her bir küme üzerinde sonsuz çoklukta sınırlı metrik tanımlanabilir.

**Soru 3)**  $X$  ayrık metrik uzay ve  $A \subset X$  olsun.  $d(p,A)+d(q,A) = 1$  olduğu bilindiğine göre  $p$  ve  $q$  hakkında ne söylenebilir? (20 puan)

Ayrık metrik uzayda  $d(p,A)$  ve  $d(q,A)$  sayıları 0 veya 1 olabilir. O halde ya  $d(p,A)=0$  ve  $d(q,A)=1$ , ya da  $d(p,A)=1$  ve  $d(q,A)=0$  olmalıdır. Bu da  $p$  ve  $q$  dan sadece birinin  $A$  kümesinde olduğunu gösterir.

**Soru 4)**  $C[0,5]$  kümesi üzerinde

$$d_{\infty}(f,g) = \sup \{|f(x) - g(x)| : x \in [0,5]\}$$

metriği tanımlanıyor.  $f(x) = x^2 - x - 1$  ve  $g(x) = 2x + 3$  fonksiyonları için  $d_{\infty}(f,g)$  değerini hesaplayınız. (20 puan)

$f(x) - g(x) = x^2 - x - 1 - (2x + 3) = x^2 - 3x - 4$  fonksiyonunun mutlak değerinin  $[0,5]$  aralığındaki en büyük değeri isteniyor.  $(f(x) - g(x))' = 2x - 3$  olduğundan  $f(x) - g(x)$  fonksiyonu ekstremum değerini  $2x - 3 = 0$  olan noktada yani  $x = 3/2$  için alır. Bu noktada  $(f-g)(3/2) = -25/4$  olacağından mutlak değerce  $25/4$  sayısı fonksiyonun verilen aralıkta alabileceği maksimum değerdir.

**Soru 5)** Bir  $X$  metrik uzayında bir  $A$  altkümesinin sınırlı oluşu ile sonlu oluşunun birbirini gerektirip gerektirmediğini birer örnekle açıklayınız. (20 puan)

Sonlu kümelerin sınırlı olduğunu ispatladık. Örneğin alışılmış reel uzayda  $A = \{a, b, c\}$  kümesi sonlu olup sınırlıdır da. Ancak sınırlı bir küme sonlu olmak zorunda değildir. Örneğin yine alışılmış reel uzayda  $A = (0,1)$  kümesi sınırlı olmasına karşın sonlu değildir.

**Not:** Süre 70 dakikadır. Başarılar. **İNC**