

# MAT 2008 METRİK UZAYLAR II 1. ARASINAV SORULARI

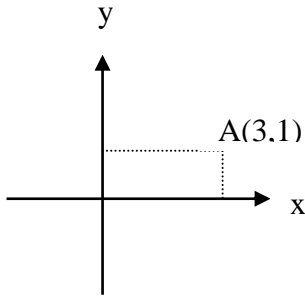
Ad-Soyad:.....

15.11.2001

No :.....

**Soru 1)**  $\mathbb{R}^2$  üzerinde ayırık metriğe göre  $A(3,1)$  noktasının 1 birimlik komşuluğunu ifade edip çiziniz. (20 puan)

Yarıçap 1 br olduğundan,  
 $D((3,1),1) = \{(3,1)\}$   
dir. Yani tek noktadan oluşmaktadır.



**Soru 2)** Boş olmayan bir  $X$  kümesi üzerinde kaç tane sınırlı metrik olabilir? Açıklayarak yazınız. (20 puan)

$X$  üzerinde en azından ayırık metriğin sınırlı olduğunu biliyoruz. Ayrıca  $d$  bir metrik iken buna bağlı olarak tanımlayabildiğimiz  $\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$  metriğinin sınırlı bir metrik olacağı açıktır. Bu metriğe bağlı olarak tanımlayabileceğimiz her bir  $\delta$  metriği de sınırlı olacağından  $X$  üzerinde sonsuz çoklukta sınırlı metrik tanımlanabilir.

**Soru 3)**  $X$  ayırık metrik uzay ve  $A \subset X$  olsun.  $d(p,A)+d(q,A) = 1$  olduğu bilindiğine göre  $p$  ve  $q$  hakkında ne söylenebilir? (20 puan)

Ayırık metrikte  $d$  fonksiyonunun alabileceği değerler 0 veya 1 olabileceğinden istenen durum ancak  $d(p,A) = 0$  ve  $d(q,A) = 1$  ya da  $d(p,A) = 1$  veya  $d(q,A) = 0$  olması durumunda mümkündür. Bu da  $p$  ve  $q$  noktalarından ancak birinin  $A$  kümesinde olmasıyla mümkündür.

**Soru 4)**  $C[0,5]$  kümesi üzerinde

$$d_{\infty}(f,g) = \sup \{|f(x) - g(x)| : x \in [0,5]\}$$

metriği tanımlanıyor.  $f(x) = x^2 - x - 1$  ve  $g(x) = 3x + 4$  fonksiyonları için  $d_{\infty}(f,g)$  değerini hesaplayınız. (20 puan)

$$\begin{aligned} d_{\infty}(f,g) &= \sup \{|x^2 - x - 1 - 3x - 4| : x \in [0,5]\} \\ &= \sup \{|x^2 - 4x - 5| : x \in [0,5]\} \end{aligned}$$

olduğundan  $h(x) = x^2 - 4x - 5$  fonksiyonunun türevi olan  $2x - 4$  ün sıfıra eşitlenmesiyle  $x = 2$  noktasında bir ekstremum değer olduğu bulunur. Bu değer 9 olduğunu hesaplamak zor değildir.

**Soru 5)** Bir  $X$  metrik uzayında bir  $A$  alt kümesinin sınırlı oluşu ile sonlu oluşunun birbirini gerektirip gerektirmediğini birer örnekle açıklayınız. (20 puan)

$\mathbb{R}$  alışılmış uzayında sınırlı olan  $(0,1)$  kümesi sonlu değildir. O halde sınırlı bir küme sonlu olmak zorunda değildir.

Sonlu bir  $A$  kümesi ise sınırlıdır. Gerçekten de,  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  şeklinde ise

$$d(A) = \sup \{d(a_i, a_j)\}$$

sayısı  $n \cdot n = n^2$  tane sayının, yani sonlu tane sayının supu olacağından sonlu olmak zorundadır.

**.Not:** Süre 60 dakikadır. Başarılar. **İNC**