MAT303 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ I 2.ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:.. **14.12.2001**

No :..

Soru 1) Hiçbir tamsayının karesinin n doğal sayı olmak üzere 4n+2 veya 4n+3 formunda olamayacağını gösteriniz. (20 puan)

k çift ise k=2n olup $k^2=4n^2 \equiv 0$ (4) tür.
k tek ise k=2n+1 olup $k^2=4(n^2+n)+1 \equiv 1$ (4) tür. Sonuç olarak hiçbir tamsayının karesi 4 modunda 2 veya 3 olamaz.

Soru 2) p asal olsun ve p a sayısını bölmesin. $x = a^{p-2}.b$ sayısının $a.x \equiv b$ (p) kongrüansının bir çözümü olduğunu gösteriniz. (20 puan)

Fermat Teoremi gereği $a^{p-1} \equiv 1$ (p) yazabiliriz. İki tarafı b ile çarparak $a^{p-1}.b \equiv 1.b$ (p) veya denk olarak $a.a^{p-2}.b \equiv b$ (p) elde ederiz. Bu da $x= a^{p-2}.b$ sayısının $ax \equiv b$ (p) kongrüansının bir çözümü olduğunu gösterir.

Soru 3) Hangi n tamsayıları için 3^n-1 sayısının asal olacağını açıklamalı olarak belirleyiniz. (20 puan)

n<0 ise 3^n-1 sayısı rasyoneldir ve asallığından söz edilemez.
n=0 ise $3^n-1=3^0-1=1-1=0$ olacağından asal değildir.
n=1 ise $3^n-1=3^1-1=3-1=2$ olup asaldır.
n>1 ise $3^n-1=(3-1)(3^{n-1}+ \ldots +3+1)$
$= 2 . (3^{n-1}+ \ldots +3+1)$ olacağından parantez içi birden büyük bir sayı olduğu için 3^n-1 asal olamaz.

Sonuç olarak, 3^n-1 sayısını asal yapan tek n tamsayısı n=1 dir.

Soru 4) $x \equiv a$ (m) ve $x \equiv a$ (n) kongrüans sisteminin çözümünü belirleyiniz. Çözüm hangi moddadır? (20 puan)

$x \equiv a$ (m) ise bir k tamsayısı için x=a+mk yazabiliriz. Bunu ikinci kongrüansta yerine koyarsak $a+mk \equiv a$ (n) veya denk olarak $mk \equiv 0$ (n) elde ederiz. Buradan $k \equiv 0 \left(\frac{n}{(m,n)}\right)$ elde edilir. Yani bir t tamsayısı için $k=\frac{nt}{(m,n)}$ şeklindedir. Bu değeri x=a+mk eşitliğinde yerine koyarsak

$x=a+\frac{mnt}{(m,n)}$ elde ederiz. $\frac{mn}{(m,n)}=[m,n]$ olduğu hatırlanırsa son olarak x=a+[m,n].t ya da denk olarak $x \equiv a$ ([m,n]) elde ederiz. Yani verilen sistemin çözümü [m,n] modunda a sayısının denklik sınıfındaki tüm tamsayılardır.

Soru 5) (p-1)! + 1 toplamını bölen en küçük asal sayının p olduğunu gösteriniz. (20 puan)

İlk olarak Wilson teoremi gereği $(p-1)! \equiv -1$ (p) olduğunu hatırlamalıyız. Denk olarak $(p-1)!+1 \equiv 0$ (p) gereği p nin (p-1)!+1 toplamını bölen bir asal sayı olduğunu söyleyebiliriz. İkinci olarak acaba p den küçük bir başka asal da bu toplamı böler mi sorusunu cevaplamalıyız.

(p-1)! = (p-1).(p-2). ... .3.2.1 olduğundan p den küçük her asal sayı (p-1)! sayısını böler. O halde bu sayının bir fazlası olan (p-1)! + 1 sayısını bölemez. Sonuç olarak p verilen toplamı bölen en küçük asal sayıdır.

Not: *Süre 60 dakikadır. Başarılar.* **İNC**