

MAT303 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ I FINAL SORULARI

Ad-Soyad:.....

31.01.2002

No :.....

Soru 1) Altıdan büyük her doğal sayının birden büyük ve aralarında asal olan iki doğal sayının toplamı olarak yazılabileceğini gösteriniz. (20 puan)

$n > 6$ olsun. n tek ise $n = 2k + 1$ şeklindedir. $n = k + (k + 1)$ olarak düşünülebileceğinden ve $(k, k + 1) = 1$ olduğundan tek sayıların istenilen şekilde yazılabileceği aşikardır.

n çift ise 2 durumun varlığı görülebilir. İlk olarak $n = 4k$ şeklinde olabilir. Bu durumda $n = (2k - 1) + (2k + 1)$ yazılabileceğinden ve $(2k - 1, 2k + 1) = 1$ olduğundan sonuç aşikardır. Son olarak $n = 4k + 2$ şeklinde ise bu kez de $n = (2k - 1) + (2k + 3)$ yazılırsa sonuç görülür.

Soru 2) Her $m > 1$ sayısı için $m! + 2$ ile $m! + m$ sayıları arasında kaç tane asal sayı bulunduğunu belirleyiniz. (20 puan)

$m! + 2$ sayısı 2 ile, $m! + 3$ sayısı 3 ile ve bu düşünce ile $m! + m$ sayısı da m ile bölünebileceğinden bu aralıkta hiçbir asal sayı yoktur.

Soru 3) a b yi bölüyorsa $2^a - 1$ sayısının da $2^b - 1$ sayısını böldüğünü gösteriniz. (20 puan)

a b yi bölüyorsa belli bir k tamsayısı için $b = a \cdot k$ yazabiliriz. O halde

$$2^b - 1 = 2^{ak} - 1 = (2^a - 1)((2^a)^{k-1} + (2^a)^{k-2} + \dots + 1)$$

yazılabilir. En sağdaki parantezin içi bir tamsayı olduğundan istenen sonuç görülür.

Soru 4) p ve q , dört modunda üçe denk olan iki farklı asal olsun. $x^2 \equiv p \pmod{q}$ kongrüansının çözümü yoksa $x^2 \equiv q \pmod{p}$ kongrüansının tam olarak iki tane çözümünün olduğunu gösteriniz. (20 puan)

m ve n birer doğal sayı olmak üzere $p = 4m + 3$ ve $q = 4n + 3$ diyelim. $(p - 1)/2 = 2m + 1$ ve $(q - 1)/2 = 2n + 1$ olduğu açıktır. Yani bu iki sayı da tektir.

$x^2 \equiv p \pmod{q}$ kongrüansının çözümünün olmaması $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$ olması anlamına gelir. Ayrıca Gauss'un ikinci dereceden indirgeme kuralı gereği

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) \cdot (-1)^{(p-1)(q-1)/4}$$

yazabiliriz. Sağ taraftaki kuvvet tek olduğundan

$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)(-1) = 1$ olarak bulunur. Yani $x^2 \equiv q \pmod{p}$ kongrüansının çözümü vardır. Kongrüans ikinci dereceden olduğu için iki tane çözüm vardır. (ya da

çözüm sayısının $1 + \left(\frac{q}{p}\right)$ olduğunu söyleyen teoremi kullanabilirsiniz).

Soru 5) p asal olsun. $2^p - 1$ sayısı asal ise $n = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ sayısının bir mükemmel sayı olduğunu gösteriniz. (20 puan)

$$\begin{aligned} t(n) &= t(2^{p-1} \cdot (2^p - 1)) = t(2^{p-1}) \cdot t(2^p - 1) \\ &= (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{p-1}) \cdot (1 + 2^{p-1}) \\ &= (2^p - 1) \cdot 2^p \\ &= 2((2^p - 1) \cdot 2^{p-1}) \\ &= 2n \end{aligned}$$

olduğundan n sayısı mükemmel bir sayıdır.

Not: Süre 70 dakikadır. Başarılar. İNC