

MAT 304 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ II 2.ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad :CEVAP ANAHTARI.....

21.05.2002

No :

Soru 1) $n \in \mathbb{N}$ olsun. $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ da hangi elemanlar 0 bölendirler ? (20 puan)

n ile aralarında asal olmayan tüm elemanlar sıfır bölendirler. Örneğin \mathbb{Z}_6 da 2,3 ve 4 sıfırdan farklı olmalarına rağmen $2 \cdot 3 = 6 \equiv 0 \pmod{6}$ ve $3 \cdot 4 = 12 \equiv 0 \pmod{6}$ olduğu açıktır. Benzer şekilde p asal ise \mathbb{Z}_p de sıfır bölen olmadığı da açıktır.

Soru 2) z ile bir halkanın etkisiz elemanını gösterelim. Öyle bir R halkası ve öyle $a, b, c \in R$ elemanları bulunuz ki $ab = ac$ iken $b \neq c$ olsun. (20 puan)

\mathbb{Z}_6 da $3 \cdot 4 \equiv 3 \cdot 2$ dir, ama üçleri sadeleştirdiğimizde $4 \pmod{6}$ da 2 ye denk değildir.

Benzer şekilde, \mathbb{Z}_{16} da $4 \cdot 8 \equiv 4 \cdot 4$ tür, ama dörtleri sadeleştirdiğimizde $4 \pmod{16}$ da 8 e denk değildir.

Soru 3) G grubunun mertebesi çift olsun. G de tersi kendisine eşit olan en az bir $a \neq e$ elemanının varlığını açıklayınız. Bu tür a elemanlarının toplam sayısı hakkında fikir yürütünüz. (20 puan)

G nin mertebesi çift olsun ve tersine G de e dışında tersi kendisine eşit olan hiçbir eleman bulunmasın. $a \in G$ nin bir elemanı ise a nın tersinin de G nin bir elemanı olduğunu biliyoruz.. Varsayım gereği a nın tersi a dan farklıdır. O halde e dışındaki tüm elemanlar tersleri ile ikiye ikiye sayılabilirler Yani çift sayıdadırlar. Bunlara etkisiz elemanı da eklersek G nin eleman sayısının tek olduğu görülür. Bu da bir çelişkidir. O halde G de e dışında en az bir elemanın daha tersi kendisine eşit olmalıdır. Bu şekildeki elemanların sayısı da tek olmalıdır (ki e ile birlikte çift sayıya ulaşabilelim).

Soru 4) $D_{24} \cong \langle a, b \mid a^{24} = b^2 = (ab)^2 = e \rangle$ grubunda a^4b elemanının mertebesini belirleyiniz. (20 puan)

$$\begin{aligned} (a^4b)^2 &= a^4b \cdot a^4b = a^3aba^3ab = a^3b^{-1}a^{-1}a^3b^{-1}a^{-1} \\ &= a^3b^{-1}a^2b^{-1}a^{-1} = a^3ba^2ba^{-1} = a^2abaaba^{-1} \\ &= a^2b^{-1}a^{-1}ab^{-1}a^{-1}a^{-1} = a^2ba^{-1}aba^{-1}a^{-1} = e \end{aligned}$$

olduğundan ikinci mertebededir.

Soru 5) İndeksi 2 olan bir alt grubun normal olması gerektiğini ispatlayınız. (20 puan)

$H \leq G$ nin indeksi iki olan bir alt grubu olsun. G deki her g elemanı için $gH = Hg$ olduğunu göstermek istiyoruz. İki durum söz konusudur.

İlk olarak $g \in H$ in bir elemanı ise, $gH = Hg = H$ olacağından istenen sonuç elde edilmiş olur.

İkinci olarak $g \notin H$ in bir elemanı değilse, gH ve Hg kosetleri H dan farklı olacaklardır. Ancak indeks iki olduğundan H dışında bir tek koset vardır ve gH da Hg de bu kosete eşit olmalıdır. Dolayısıyla bu durumda da $gH = Hg$ dir.

Not : Süre 70 dakikadır. Başarılar. İNC