

MAT 3035 METRİK UZAYLAR II 1. ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:.....

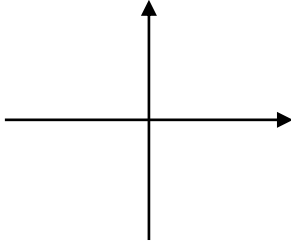
20.11.2002

No :.....

Soru 1) \mathbf{R}^2 üzerinde ayrık metriğe göre $A(0,1)$ noktasının 1 birimlik ve $\frac{1}{2}$ birimlik komşuluklarını ifade edip çiziniz. (20 puan)

$$\begin{aligned} D((0,1),1) &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid d((x,y),(0,1)) < 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid d((x,y),(0,1)) = 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x,y) = (0,1)\} \\ &= \{(0,1)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D((0,1),1/2) &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid d((x,y),(0,1)) < 1/2\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid d((x,y),(0,1)) = 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x,y) = (0,1)\} \\ &= \{(0,1)\} \end{aligned}$$



Soru 2) Bir X metrik uzayında keyfi sayıda açık kümenin kesişimi hakkında ne söylenebilir? Örnek veriniz. (20 puan)

Açık ta olabilir, kapalı da.

Açık olabileceğine birçok örnek verilebilir. Reel alışılmış uzayda $A_n = (n, n+1)$ açık kümelerinin kesişimi boşküme olup açıktır.

Ters örnek olarak, yine reel alışılmış uzayda $A_n = (-1/n, 1/n)$ açık kümelerini alırsak bunların sonlu kesişimi açıktır. Ancak keyfi kesişim alırsak bu kümelerin kesişimi $\{0\}$ noktasıdır ve bu küme alışılmış uzayda açık değil kapalıdır.

Soru 3) X ayrık metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. $d(p,A)+d(q,A) = 2$ olduğu bilindiğine göre p ve q hakkında ne söylenebilir? (20 puan)

$d(p,A)$ ve $d(q,A)$ sayılarının 0 veya 1 değerini alabileceğini biliyoruz. İkisinin toplamının 2 olması için her birinin 1 olması gerekir. Bu da p ve q noktalarının ikisinin de A kümesinin dışında olmasıyla mümkündür.

Soru 4) X ayrık metrik uzayında bir A kümesinin içi, dışı, sınırı ve çapı hakkında ne söylenebilir? (20 puan)

A nın içi kendisine eşittir. Çünkü ayrık metrik uzayda her küme açıktır.

A nın dışı tümleyeninin içi olarak tanımlandığından ve tümleyeni de her küme gibi ayrık metrik uzayda açık olduğundan, A nın tümleyenine eşittir.

A nın sınırı X uzayından A nın içini ve dışını çıkarmakla elde edileceğinden ve bunlar da A nın kendisi ve tümleyeni olduğundan boşkümedir.

A boşkümeden farklıysa çapı 1; boşküme ise 0 dir.

Soru 5) \mathbf{R}^2 üzerinde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ noktaları için

$$d_1(x,y) = \begin{cases} |x_1 - y_1| & x_2 = y_2 \text{ ise} \\ |x_1| + |x_2 - y_2| + |y_1| & x_2 \neq y_2 \text{ ise} \end{cases}$$

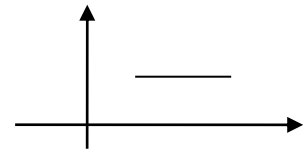
ile tanımlanan metriğe göre $A(2,1)$ noktasının 1 birimlik komşuluğunu ifade ederek çiziniz. (20 puan)

$$D((2,1),1) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid d((x,y),(2,1)) < 1\}$$

Eğer $y = 1$ ise $|x-2| < 1$ ve dolayısıyla $1 < x < 3$ elde edilir.

Eğer $y \neq 1$ ise $|x| + |y-1| + |2| < 1$ ve denk olarak $|x| + |y-1| < -1$ elde edilir ki bunu sağlayan noktalar kümesi boşkümedir. O halde sorulan komşuluk

$\{(x,y) \mid 1 < x < 3 \text{ ve } y = 1\}$ kümesidir.



Not: Süre 60 dakikadır. Başarılar. **İNC**