MAT 4061 GALOIS TEORİSİ 2.ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:.. **19.12.2002**

No :..

Soru 1) F bir halka ve $f(x) \in F[x]$ in derecesi n ise, F te, f(x) in en çok n kökünün bulunup bulunmayacağına örnek veriniz. (20 puan)

Özel olarak F bir cisim ise f(x) in en çok n kökünün bulunduğunu biliyoruz. Örneğin **R** de veya **Q** da, x^2-1 polinomunun iki kökü vardır.

F sadece bir halka ise bu doğru olmayabilir. Örneğin x^2-1 polinomunun $\mathbf{Z}_{15}$ de 1, 4, 11 ve 14 şeklinde dört kökü mevcuttur ve bu polinomun derecesi olan 2 den fazladır.

Soru 2) p asal iken Zp nin bir tamlık bölgesi olduğunu gösteriniz. (20 puan)

Eğer $\mathbb{Z}_p$ de $[a][b] = 0$ ise bu $ab \equiv 0 \pmod p$ anlamına gelir. Yani p, ab nin bir bölenidir. O halde p, ya a nın ya da b nin bir bölenidir. Başka bir deyişle $[a] = 0$ veya $[b] = 0$ dır.

Soru 3) Aşağıdaki kavramları tanımlayınız. (20 puan)

F[x] te obeb: F bir cisim ve $f(x), g(x) \in R[x]$ olsun. f(x) ve g(x) in *en büyük ortak böleni (obeb),*

- d(x), f(x) ve g(x) in bir ortak böleni, yani, $d|f$ ve $d|g$;
- c(x), f(x) ve g(x) in bir başka ortak böleni iken $c|d$,
- d(x) in başkatsayısı 1

özelliklerine sahip bir $d(x) \in R[x]$ polinomudur.

Temel ideal bölgesi: R bir halka olsun. Eğer R, her ideali bir temel ideal olan bir bölge ise, R ye bir *temel ideal bölgesi* denilir.

Soru 4) F bir cisim ise F[x] teki her bir idealin bir temel ideal olduğunu gösteriniz. (20 puan)

I, F[x] te bir ideal olsun. $I = \{0\}$ ise $I = (0)$ dır. Yani 0 ile üretilen temel idealdir. Eğer $I \neq \{0\}$ ise, I da derecesi en küçük olan bir m(x) polinomu seçelim. $I = (m(x))$ olduğunu göstermek istiyoruz.

$(m(x)) \subset I$ olduğu açıktır. Tersine I da bir f(x) elemanı alalım. Bölme algoritması gereği, $r(x) = 0$ veya $\partial(r) < \partial(m)$ olmak üzere

$$f(x) = q(x)m(x) + r(x)$$

olacak şekilde q(x) ve r(x) polinomları vardır. $r(x) = f(x) - q(x)m(x) \in I$ dır. $r(x) \neq 0$ ise, bu durumda m(x) in I daki en küçük dereceli polinom oluşu ile çelişiriz. O halde $r(x) = 0$ dır ve $f(x) = q(x)m(x) \in (m(x))$ elde ederiz.

Soru 5) F bir cisim ve $f(x), g(x) \in F[x]$ olsun. Bu taktirde f ile g nin okekinin, $(f)\cap(g)$ nin birim başkatsayılı üreteci olduğunu gösteriniz. (20 puan)

F[x] bir temel ideal bölgesi olduğundan, birim başkatsayılı bir $m(x) \in F[x]$ polinomu için $(f) \cap (g) = (m)$ dir. $m \in (f)$ oluşu belli bir $r(x) \in F[x]$ için $m(x) = f(x)r(x)$ oluşunu; $m \in (g)$ oluşu da belli bir $s(x) \in F[x]$ için $m(x) = g(x)s(x)$ oluşunu gerektirir. O halde m(x), hem f hem de g nin bir ortak katıdır. Son olarak, eğer h(x), f ile g nin bir başka ortak katı ise, $h(x) = f(x)r'(x) = g(x)s'(x)$ yazabiliriz. Bu da $h \in (f) \cap (g) = (m)$ anlamına geleceğinden $m|h$ demektir.

Not: *Süre 60 dakikadır. Başarılar.* **İNC**