

MAT 3035 METRİK UZAYLAR 2.ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:.....

25.12.2002

No :.....

Soru 1) Ayrık metrik uzayda bir dizinin yakınsaklığı hakkında ne söylenebilir? (20 puan)

X ayrık metrik uzayında bir (x_n) dizisinin a noktasına yakınsaması demek verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $n \geq n_0$ özelliğindeki her bir n doğal sayısı için $d(x_n, a) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbf{N}$ bulunabilmesi demektir. Ayrık metrik uzayda olduğumuzdan $d(x_n, a)$ ya 0 ya da 1 değerini alabilir. O halde yakınsamanın olması, her $\varepsilon > 0$ sayısı için dizinin belli bir teriminden sonraki tüm terimlerinin $d(x_n, a) = 0 < \varepsilon$ veya $d(x_n, a) = 1 < \varepsilon$ şartını sağlamasıyla mümkündür. Her ε pozitif sayısı 1 den büyük olamayacağından yakınsama ancak $d(x_n, a) = 0$ olduğunda mümkündür. Bu da metrik tanımı gereği $x_n = a$ olmasıyla mümkündür. Yani dizinin belli bir teriminden sonraki tüm terimlerinin a ya eşit olması gerekir. Bu da dizinin sabit dizi olmasıyla mümkündür. Yani ayrık metrik uzayda sabit dizi dışında yakınsak dizi yoktur.

Soru 2) $[-2, -1)$ kümesinin R deki alışımlı ve ayrık metriklere göre açıklığını tartışınız. (20 puan)

Alışımlı metriğe göre $(x_n) = (-1 - \frac{1}{n})$ dizisi, terimleri $[-2, -1)$ de olan bir dizidir ve $(a_n) \rightarrow -1$ dir. Ancak $-1 \notin [-2, -1)$ olduğundan teoreme göre $[-2, -1)$ kapalı değildir. Ayrık metriğe göre her küme hem açık hem de kapalı olduğundan $[-2, -1)$ hem açık hem de kapalıdır.

Soru 3) X ayrık metrik uzayında boş olmayan bir A altkümesinin içi, dışı, sınırı ve kapanışı hakkında ne söylenebilir? (20 puan)

A açık (aynı zamanda kapalı) bir küme olduğundan $\overset{\circ}{A} = A$ olur. A nın dışı A nın tümleyeninin içi olduğundan, ve A nın tümleyeninin içi yine açık bir küme olacağından A nın dışı A nın tümleyenidir. A nın sınırı, X uzayından A nın içini ve dışını çıkarmakla elde edildiğinden, boşkümedir. Son olarak A kapalı olduğundan kapanışı da A ya eşittir.

Soru 4) Reel alışımlı uzayda Q rasyonel sayılar kümesinin içi, dışı, sınırı ve kapanışı hakkında ne söylenebilir? Kısaca açıklayınız. (20 puan)

$$\overset{\circ}{Q} = \phi,$$

$$\text{dış}(Q) = \phi,$$

$$\partial(Q) = \mathbf{R},$$

$$\bar{Q} = \mathbf{R}$$

Soru 5) Bir metrik uzayda yakınsak bir dizinin limitinin tek olduğunu gösteriniz. Böyle bir dizinin yığılma noktaları hakkında ne diyebiliriz? (20 puan)

Tersine (x_n) dizisinin a ve b gibi iki noktaya yakınsadığını varsayalım. Dolayısıyla, verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $n \geq n_1$ için $d(x_n, a) < \varepsilon/2$ olacak biçiminde bir $n_1 \in \mathbf{N}$ ve her $n \geq n_2$ için $d(x_n, b) < \varepsilon/2$ olacak biçiminde bir $n_2 \in \mathbf{N}$ vardır. Eğer $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ olarak seçilirse, her $n \geq n_0$ için

$$d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

elde edilir, $\varepsilon > 0$ sayısı keyfi olduğundan $d(a, b) = 0$ ve dolayısıyla $a = b$ dir.

Not: Süre 60 dakikadır. Başarılar. **İNC**