

MAT3014 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ II FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:.....

12.06.2003

No :.....

Soru 1) a ile üretilen 12 mertebeli devirli grupta $a^3, a^5, a^6, a^8, a^9, a^{10}$ elemanlarının ürettiği altgrupları bulunuz.

$a^{12} = e$ olduğundan
 $\langle a^3 \rangle \cong C_{12/(12,3)} \cong C_4;$
 $\langle a^5 \rangle \cong C_{12/(12,5)} \cong C_{12};$
 $\langle a^6 \rangle \cong C_{12/(12,6)} \cong C_2;$
 $\langle a^8 \rangle \cong C_{12/(12,8)} \cong C_3;$
 $\langle a^9 \rangle \cong C_{12/(12,9)} \cong C_4;$
 $\langle a^{10} \rangle \cong C_{12/(12,10)} \cong C_6$

dır.

Soru 2) Bir R halkasında a ve b elemanları için $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ eşitliği her zaman doğru mudur? Açıklayınız.

$(a-b)(a+b) = a.a + a.b - b.a - b.b = a^2 + ab - ba - b^2$ olup $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ olması ancak $ab - ba = 0$ yani $ab = ba$ olmasıyla mümkün olacaktır. Bu da halkanın değişmeli olması demektir.

Soru 3) Sonlu bir G grubunda bir g elemanının mertebesi grubun mertebesine eşitse grup hakkında ne söylenebilir? Kısaca açıklayınız.

Bir elemanın mertebesine kadarki tüm kuvvetleri farklıdır. Bu sebeple verilen özellikteki bir elemanın mertebesine kadar olan tüm kuvvetleri G grubunun tüm elemanlarını verecektir. Yani G grubunun elemanları g nin kuvvetleri şeklinde ifade edilebilen elemanlardır ki bu da g nin G grubunu ürettiği anlamına gelir. Yani G , tek bir elemanla üretilmektedir. Bu da G nin bir devirli grup olduğu anlamına gelir.

Soru 4) $C_{21} \times C_{22} \times C_{65}$ direkt çarpım grubu bir devirli grup mudur? $C_{21} \times C_{22} \times C_{65} \cong C_{143} \times C_n$ ise $n = ?$

$(3,7) = (2,11) = (5,13) = 1$ olup $C_{21} \cong C_3 \times C_7; C_{22} \cong C_2 \times C_{11}; C_{65} \cong C_5 \times C_{13}$ olduğunu biliyoruz. Tüm bu mertebeler aralarında asal olduklarından teorem gereği

$C_{21} \times C_{22} \times C_{65} \cong C_{3.7.2.11.5.13}$
yazılabilir ve bu grup mertebesi 2.3.5.7.11.13 olan bir devirli gruptur.

Bu grubun $C_{143} \times C_n$ direkt çarpımına izomorf olması için n ile 143 aralarında asal ve $n.143 = 2.3.5.7.11.13$ olması gerekir. Bu da $n = 2.3.5.7 = 210$ olmasıyla mümkündür.

Soru 5) $D_{12} \cong \langle a, b \mid a^{12} = b^2 = (ab)^2 = e \rangle$ dihedral grubunda $x = a^3b$ elemanının mertebesini hesaplayınız.

$(ab)^2 = e$ olduğundan $ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba^{-1}$ yazabiliriz. Bu durumda

$$x^2 = (a^3b)^2 = a^3ba^3b = a^2aba^2ab = a^2ba^{-1}a^2ba^{-1} = a^2baba^{-1} = a^2bba^{-1}a^{-1} = a^2a^{-1}a^{-1} = e$$

olacağından x elemanının mertebesi ikidir.

Not: Süre 60 dakikadır. Başarılar. **İNC**