MAT 3035 METRİK UZAYLAR II 1. ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:...*CEVAP ANAHTARI*......... **03.11.2003**

No :..

Soru 1) Kapalılık bir metrik değişmezi midir?

Bir özelliğin metrik değişmezi olması için homeomorfizm altında korunması gerekir. O halde kapalı kümelerin homeomorfizmler altında yine kapalı kümelere gidip gitmediğine bakacağız. $f : X_d \to Y_m$ bir homeomorfizm ise f birebir, örten, f ve f^{-1} sürekli demektir. $K \subset X$ kapalı olsun. f(K) nın da kapalı olduğunu göstermeliyiz. f^{-1} sürekli olduğundan f^{-1} altında açıkların ters görüntüleri açık, kapalıların ters görüntüleri de kapalıdır. Yani $(f^{-1})^{-1}(K)$ Y de kapalıdır. Bu da f(K) nın Y de kapalı olduğunu göstermektedir. Yani K kapalı ve f bir homeomorfizm ise f(K) da kapalıdır. Bu da kapalılığın bir metrik değişmezi olduğunu gösterir.

Soru 2) $f:X_d \to Y_m$ bir eşmetri ise $f^{-1}:Y_m \to X_d$ nin de bir eşmetri olduğunu gösteriniz.

$f : X_d \to Y_m$ bir eşmetri ise her $a, b \in X$ için d(a,b) = m(f(a),f(b)) demektir. f^{-1} in eşmetri olması için her $c, d \in Y$ için $m(c,d) = d(f^{-1}(c),f^{-1}(d))$ olması gerekir. c=f(a) ve d=f(b) alınırsa bu son eşitlik $m(f(a),f(b)) = d(f^{-1}(f(a)),f^{-1}(f(b)))$ halini alır ki bu da m(f(a),f(b)) = d(a,b) olup olmadığı anlamına gelir. Bu ise f eşmetri olduğundan zaten doğrudur.

Soru 3) Düzgün sürekli olmayan ancak sürekli olan bir fonksiyon örneği veriniz. Kısaca açıklayınız.

X = {1, ½, 1/3, …} ve Y = **N** üzerinde **R** den indirgenen alışılmış metrikler olmak üzere $f : X \to Y$, f(x) = 1/x fonksiyonu örneğin 1/99999999 ile 1/99999989 gibi yakın iki sayıyı 99999999 ile 99999989 gibi aralarındaki fark 10 olan iki sayıya götüreceğinden düzgün sürekli değildir. Ama X ve Y üzerinde alt uzay metrikleri olduğundan ve her altkümeleri açık olacağından açıkların ters görüntüleri de her zaman açık olacaktır ve f süreklidir.

Soru 4) $f: X_d \to Y_m$ açık bir dönüşüm ise $f^{-1} : Y_m \to X_d$ dönüşümünün sürekli olduğunu gösteriniz.

$f : X_d \to Y_m$ bir açık dönüşüm ise, her $A \subset X$ açığının görüntüsü olan f(A), Y de açıktır. f^{-1} in sürekli olması için f^{-1} in değer kümesi olan X deki açıkların ters görüntülerinin f^{-1} in tanım kümesi olan Y de açık olmaları gerekir. Yani her $A \subset X$ açığı için $(f^{-1})^{-1}(A)$ Y de açık olmalıdır. Bu da her $A \subset X$ açığı için f(A) nın Y de açık olmasına denktir. f açık dönüşüm olduğundan bu aşikârdır.

Soru 5) Alışılmış ve ayrık metriklere göre özdeşlik dönüşümünün sürekliliğini inceleyiniz.

d alışılmış ya da ayrık metrik olmak üzere $f : X_d \to X_d$, f(x) = x şeklindeki özdeşlik dönüşümü olsun. $f^{-1}(x) = x$ olduğundan f^{-1} de özdeşlik dönüşümüdür. O halde açıkların ters görüntüleri yine kendileri olup açık olacağından f özdeşlik dönüşümü süreklidir.

Not: *Süre 70 dakikadır. Başarılar.* **İNC**