MAT 3035 METRİK UZAYLAR II 2. ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:.. **08.12.2003**
No :..

Soru 1) X = [0,1] üzerinde ayrık metrik olsun. A = {1, $\frac{1}{4}$, 1/9, 1/16, ...} kümesinin kompakt olup olmadığını açıklayınız.

Ayrık metrik uzayda bir noktanın 1 yarıçaplı açık komşuluğu sadece merkezdeki noktadan oluşacağından,

$$\mathcal{A} = \{D(1/n^2, 1) : n = 1, 2, 3, ...\}$$
$$= \{\{1\}, \{1/4\}, \{1/9\}, ...\}$$

ailesi A kümesinin bir açık örtüsüdür. Ancak bu örtünün hiçbir sonlu alt örtüsünün bulunamayacağı açıktır. O halde A kompakt değildir.

Soru 2) (X,d) ayrık metrik uzayının tam olup olmadığını açıklayınız.

Ayrık metrik uzaydaki Cauchy dizilerinin terimlerinin sadece sonlu tanesi farklı olup, bir yerden sonraki tüm terimleri ise sabittir. Dolayısıyla yakınsaktır. Yani ayrık metrik uzayda her bir Cauchy dizisi yakınsaktır ve uzay da tamdır.

Soru 3) (X,d) ayrık metrik uzay ve Y boş olmayan bir altküme ise Y tam uzay olur mu? Açıklayınız.

Ayrık metrik uzaydaki her kümenin hem açık hem de kapalı olduğunu biliyoruz. Aynı zamanda ayrık metrik uzay tam uzaydır. Tam uzaylarda sadece kapalı altuzayların tam olduğu sonucuna göre boş olmayan her altküme kapalı olacağından aynı zamanda tam da olur.

Soru 4) f: $X_d \to Y_m$ homeomorfizminin bir açık dönüşüm olup olmayacağını açıklayınız.

f bir homeomorfizm ise, f birebir, örten, f ve f^{-1} süreklidirler. $f^{-1} : Y \to X$ sürekli olduğundan varış uzayı olan X deki açıkların ters görüntüleri Y de açık olacaktır. Yani X deki açıklar, Y de açıklara gider. Bu da f in açık dönüşüm olduğunu belirtir.

Soru 5) f: $X_d \to Y_m$, f(x) = c sabit fonksiyonunun X ve Y üzerindeki metrikler ne olursa olsun sürekli olduğunu gösteriniz.

Her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $x_0 \in X$ noktası için $d(x,x_0) < \delta$ iken $m(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde bulunması gerekmektedir. $f(x) = f(x_0) = c$ olduğundan

$$m(f(x),f(x_0)) = m(c,c) = 0 < \varepsilon$$

olacağı açıktır.

Not: *Süre 70 dakikadır. Başarılar.* **İNC**