

MAT 4061 GALOIS TEORİSİ 2.ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:.....

22.12.2003

No :.....

Soru 1) $x^3 - 24x^2 - 24x - 25$ polinomunun ikinci terimini yok ediniz (düşürünüz).

$$x \rightarrow x + \frac{24}{3} = x + 8 \text{ dönüşümü yapılırsa}$$
$$(x+8)^3 - 24(x+8)^2 - 24(x+8) - 25$$
$$= x^3 + 24x^2 + 192x + 512 - 24x^2 - 384x - 1536 - 24x - 192 - 25$$
$$= x^3 - 216x - 1241$$

Soru 2) $x^4 - 20x^2 + 9x + 28 = 0$ polinomuna karşılık gelen üçüncü derece denklemi bulunuz

$$x^4 - 20x^2 + 9x + 28 = (x^2 + kx + 1)(x^2 - kx + m) \text{ yazılıp}$$

polinom eşitliği kullanılırsa

$$1 + m - k^2 = -20$$
$$k(m - 1) = 9$$
$$1m = 28$$

elde edilir. $2m = k^2 - 20 + 9/k$ ve $2l = k^2 - 20 - 9/k$ değerleri üçüncü denklemde yerine konulursa

$$k^6 - 40k^4 + 288k^2 - 81 = 0 \text{ ve } k^2 = t \text{ dönüşümü ile}$$
$$t^3 - 40t^2 + 288t - 81 = 0$$

bulunur.

Soru 3) Bir R halkasındaki her maksimal I idealinin bir asal ideal olduğunu gösteriniz.

I bir maksimal ideal ise R/I bir cisimdir. Her cisim bir bölge olduğundan R/I da bir bölgedir. O halde I bir asal idealdir.

Soru 4) F bir cisim ve $p(x) \in F[x]$ sıfırdan farklı bir polinom olsun. ($p(x)$) bir asal ideal ise $p(x)$ indirgenemezdir, gösteriniz.

Olmayana ergi metodunu kullanacağız. $p(x)$ in indirgenemez olmadığını varsayalım. Bu durumda $\partial(a) < \partial(p)$ ve $\partial(b) < \partial(p)$ olmak üzere p polinomu $p(x) = a(x).b(x)$ şeklinde çarpanlarına ayrılabilir. (p) deki sıfırdan farklı her polinomun derecesi $\partial(p)$ den büyük ya da eşit olduğundan ne a nın ne de b nin (p) de kalmadığı görülür. Yani (p) bir asal ideal değildir. O halde tersine (p) asal idealse $p(x)$ de indirgenemezdir.

Soru 5) $x^3 - 6x + 4 = 0$ polinomunda $u = y + z$ dönüşümü yaparak y^3 ü belirleyiniz.

$$u = y+z \text{ dönüşümüyle } (y+z)^3 - 6(y+z) + 4 = 0 \text{ ve}$$

buradan $y^3 + z^3 + 3yz(y+z) - 6(y+z) + 4 = 0$ elde edilir. Burdan da $y^3 + z^3 + u(3yz - 6) + 4 = 0$ bulunur. $yz = 2$ dönüşümü yapılırsa

$$y^3 + z^3 = -4 \text{ ve } y^3 z^3 = 8$$

elde edilir. $z^3 = 8/y^3$ yazılırsa ilk denklem

$$y^3 + 8/y^3 = -4$$

ve buradan

$$y^6 + 4y^3 + 8 = 0$$

elde ederiz. $y^3 = t$ dönüşümüyle

$$t^2 + 4t + 8 = 0$$

ve

$$t = y^3 = -2 + 2i$$

olarak bulunur.

Not: Süre 80 dakikadır. Başarılar. **INC**