MAT3035 METRİK UZAYLAR II FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:..CEVAP ANAHTARI............. **22.01.2004**
No :..

Soru 1) Sürekli iki fonksiyonun birleşiminin de sürekli olduğunu gösteriniz. (20 puan)

$f: X_d \to Y_m$ ve $g: Y_m \to Z_s$ sürekli olsun. $gof: X_d \to Z_s$ fonksiyonunun sürekli olduğunu göstermek istiyoruz. A, Z_s uzayında açık ise g sürekli olduğundan $g^{-1}(A)$, Y_m de açıktır. O halde f sürekli olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(A))$, X_d de açıktır. Halbuki bu son küme $(gof)^{-1}(A)$ olup açık oluşu gereği gof fonksiyonunun sürekli olduğu görülür.

Soru 2) Sürekli bir fonksiyon açık kümeleri açık kümelere götürmek zorunda mıdır? Örnekle açıklayınız. (20 p)

Hayır. Örneğin $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = c$ sabit fonksiyonu **R** üzerindeki metrik uzaylar ne olursa olsun sürekli olduğu halde, açık kümeleri $\{c\}$ tek nokta kümesine götürür ki bu da kapalıdır.

Soru 3) Bir metrik uzayda yakınsak bir dizinin limitinin tek olduğunu gösteriniz.

Tersine (x_n) dizisinin a ve b gibi iki noktaya yakınsadığını varsayalım. Dolayısıyla, verilen her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık, her $n \geq n_1$ için $d(x_n,a)< \varepsilon/2$ olacak biçiminde bir $n_1 \in \mathbf{N}$ ve her $n \geq n_2$ için $d(x_n,b)< \varepsilon/2$ olacak biçiminde bir $n_2 \in \mathbf{N}$ vardır. Eğer $n_o = \max\{n_1,n_2\}$olarak seçilirse, her $n \geq n_0$ için

$$d(a,b) \leq d(a,x_n) + d(x_n,b) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

elde edilir, $\varepsilon>0$ sayısı keyfi olduğundan $d(a,b) = 0$ ve dolayısıyla $a = b$ dir.

Soru 4) Bir metrik uzayda yakınsak bir dizi Cauchy dizisi midir? Açıklayınız. (20 p)

(x_n), X_d metrik uzayında yakınsak bir dizi olsun ve $p \in X$ noktasına yakınsasın. Yakınsaklık gereği her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $m, n \geq n_0$ için $d(x_n,p) < \varepsilon/2$ ve $d(x_m,p) < \varepsilon/2$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı mevcuttur. O halde aynı n_0 doğal sayısı için

$$\begin{aligned} d(x_m,x_n) &\leq d(x_m,p) + d(p,x_n) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

olur ki bu da (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

Soru 5) **Q** rasyonel sayılar kümesi **R** alışılmış uzayında bağlantılı mıdır?

$G = (-\infty, \sqrt{2})$ ve $H = (\sqrt{2},\infty)$ kümeleri bu uzayda açıktır. G ile H ın birleşimi $A = \mathbf{Q}$ yu örter. G ile H kesişmez. Ayrıca G ve H ın **Q** nun elemanlarını bulundurduğu açıktır. O halde G ve H kümeleri A nın bir ayrışımıdır. Yani **Q** rasyonel sayılar kümesi **R** uzayında bağlantısızdır.

__**Not:**__ *Süre 75 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***