

# MAT 3014 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ II FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:.....

28.05.2004

No :.....

**Soru 1)**  $G$  bir değişmeli grup ve  $H = \{ x \in G : x^2 = e \}$  olsun.  $H$  in  $G$  nin bir altgrubu olduğunu gösteriniz.

$a, b \in H$  alalım.  $ab^{-1} \in H$  olduğunu göstermeliyiz.  $a, b \in H$  olduğundan  $a^2 = b^2 = e$  olduğunu biliyoruz. O halde  $(ab^{-1})^2 = e$  olduğunu göstermek yeterli olur.  $G$  değişmeli olduğundan

$$(ab^{-1})^2 = ab^{-1}ab^{-1} = aab^{-1}b^{-1} = a^2b^{-2} = a^2(b^2)^{-1} = e$$

elde edilir. Yani  $ab^{-1} \in H$  dır.

**Soru 2)**  $f : G \rightarrow G$ ,  $f(x) = x^{-1}$  tanımlanıyor.  $f$  bir homomorfizm ise  $G$  nin değişmeli olduğunu gösteriniz.

$f$  bir homomorfizm olduğundan her  $a, b \in G$  için

$f(a.b) = f(a).f(b)$  olduğunu biliyoruz. Yani

$$(ab)^{-1} = a^{-1}.b^{-1}$$

dir. Ayrıca  $(ab)^{-1} = b^{-1}.a^{-1}$  dir. Böylece

$$a^{-1}.b^{-1} = b^{-1}.a^{-1}$$

dir. İki tarafın tersleri alınırsa her  $a, b \in G$  için  $ab = ba$  sonucu elde edilir.

**Soru 3)**  $Z_{17}$  bir tamlık bölgesi midir?  $Z_{17}$  de sadeleştirme kuralları geçerli midir? Kısaca açıklayınız?

17 asal olduğundan  $Z_{17}$  de sıfır bölen yoktur. Dolayısıyla bir tamlık bölgesidir. Bu sebeple her tamlık bölgesinde sadeleştirme kuralları da geçerlidir.

**Soru 4)**  $C_{143}$  grubu bir devirli grup mudur? Hangi mertebeden kaç tane eleman olduğunu belirleyiniz. Kısaca açıklayınız.

Evet. Mertebesi de 143 dür.  $143 = 11.13$  olup bu sayılar aralarında asal olduklarından  $C_{11} \times C_{13}$  e izomorftur. Elemanlarının mertebeleri de 143 ün pozitif bölenleri olduğundan 1, 11, 13 veya 143 olabilir. Mertebesi 1 olan tek eleman  $e$  dir.  $143/(143,d) = 13$  olacak şekilde tüm  $d$  lerin mertebesi 13 tür. Yani  $(143,d) = 11$  olacak şekilde elemanların mertebesi 13 dür. Bunlarsa 11, 22, ... olduğundan 13 tanedir. Benzer şekilde  $143/(143,d) = 13$  olacak şekilde tüm  $d$  lerin mertebesi 11 dir. Yani  $(143,d) = 13$  olacak şekilde elemanların mertebesi 13 dür. Bu şekilde de 11 tane eleman vardır. Geriye kalan  $143 - (1+11+13) = 118$  elemanın mertebesi de 143 olacaktır.

**Soru 5)**  $Z_{18}$  halkasındaki sıfır bölenler nelerdir? Bunlardan faydalanarak  $x^2 - 3x - 4 = 0$  denkleminin  $Z_{18}$  deki tüm çözümlerini bulunuz.

18 ile aralarında asal olmayan elemanlar yani 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16 sıfır bölendir.  $x^2 - 3x - 4 = 0$  denkleminin sol tarafı çarpanlarına ayrılırsa  $(x-4)(x+1) = 0$  elde edilir. İki aşikâr kök  $x = 4$  ve  $x = -1 = 17$  dir. Bunun dışında aralarında 5 fark olan sıfır bölenlere karşılık olarak da diğer kökleri bulabiliriz. Mesela 3 ile 8 arasındaki fark 5 olduğundan  $x-4 = 3$  ve  $x+1 = 8$  olan  $x = 7$  değeri bir kök olur. Benzer şekilde  $x-4 = 4$  ve  $x+1 = 9$  olan  $x = 8$  değeri;  $x-4 = 9$  ve  $x+1 = 14$  olan  $x = 13$  değeri;  $x-4 = 10$  ve  $x+1 = 15$  olan  $x = 14$  değeri kök olabilir. Bunlardan sadece sonuncusunun kök olmadığı deneme yoluyla bulunur. Diğerleri köktür.

**Not:** Süre 60 dakikadır. Başarılar. **İNC**