

MAT 3014 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ II FİNAL SORULARI

Ad-Soyad: ...CEVAP ANAHTARI.....

11.08.2004

No :

Soru 1) Bir devirli grubun her bölüm grubunun değişmeli olduğunu gösteriniz.

Bir devirli grubun her bölüm grubu devirlidir. Her devirli grup ta değişmeli olduğundan sonuç açıktır.

Soru 2) $C_6 \times C_5$ direk çarpım grubunda hangi mertebeden kaç tane eleman bulunduğunu belirleyiniz?

$C_6 \times C_5 \cong C_{30}$ olduğundan bu gruptaki elemanların mertebeleri 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 veya 30 olabilir. 1 mertebeli tek eleman e dir. C_{30} un a ile üretildiğini farzedelim. a, a^7 , a^{11} , a^{13} , a^{17} , a^{19} , a^{23} , a^{29} elemanlarının mertebeleri 30 dur. $(30, k) = 2$ olacak şekilde k = 2, 4, 8, 14, 16, 22, 26, 28 için a^k elemanlarının mertebesi $30/2 = 15$ dir. $(30, k) = 3$ olacak şekilde k = 3, 9, 21, 27 için a^k elemanlarının mertebesi $30/3 = 10$ dur. $(30, k) = 5$ olacak şekilde k = 5, 25 için a^k elemanlarının mertebesi $30/5 = 6$ dir. $(30, k) = 6$ olacak şekilde k = 6, 12, 18, 24 için a^k elemanlarının mertebesi $30/6 = 5$ dir. $(30, k) = 10$ olacak şekilde k = 10, 20 için a^k elemanlarının mertebesi $30/10 = 3$ dür. $(30, k) = 15$ olacak şekilde a^{15} elemanının mertebesi $30/15 = 2$ dir. Sonuç olarak mertebesi 1 olan 1, 2 olan 1, mertebesi 3 olan 2, mertebesi 5 olan 4, mertebesi 6 olan 2, mertebesi 10 olan 4, mertebesi 15 olan 8 ve mertebesi 30 olan (yani üreteç olan) 8 tane eleman vardır.

Soru 3) Mertebesi tek olan bir G grubunda e dışında tersi kendisine eşit olan eleman olmak zorunda mıdır? Açıklayınız.

Bir grupta bir eleman tersine eşitse tersi ile birlikte bir tek eleman mevcut demektir. Ama bir elemanın tersi kendisine eşit değilse bu eleman tersiyle birlikte iki eleman olarak sayılacaktır. Bu şekildeki elemanların toplam sayısı da 2 nin bir tam katı olup çift bir sayıdır. Buna etkisiz elemanı da eklersek tek sayıda eleman elde edilir. Dolayısıyla e dışında tersi kendisine eşit olan elemanlar olmayabilir. Varsa bu elemanlar çift sayıda olmalıdır.

Soru 4) Z_{12} halkasının karakteristiğini ve sıfır bölenlerini belirleyiniz? $x^2 - 3x - 4 = 0$ denkleminin Z_{12} deki tüm çözümlerini bulunuz.

Karakteristik 12 dir ve sıfır bölenler 2, 3, 4, 6, 8, 9 ve 10 dur. Çözümler ise 4, 7, 8 ve 11 in denklik sınıflarındaki tüm tamsayılardır.

Soru 5) $D_{12} \cong \langle a, b \mid a^{12} = b^2 = (ab)^2 = e \rangle$ grubunun mertebesini, altgruplarının mertebelerini belirleyiniz. $x = a^5 b$ elemanının mertebesini hesaplayınız.

D_{12} dihedral grubunun mertebesi $2 \cdot 12 = 24$ dür. Dolayısıyla altgruplarının mertebeleri 24 ün pozitif bölenleridir. Yani 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 veya 24 olabilir. x elemanı bir yansıma olduğundan mertebesi 2 dir.

Not: Süre 70 dakikadır. Başarılar. İNC