# MAT 3035 METRİK UZAYLAR II 1. ARASINAV SORULARI

**Ad-Soyad:…CEVAP ANAHTARI…......** **12.11.2004**
**No :................................................**

**Soru 1)** X ayrık metrik uzayında hangi dizilerin yakınsak olduğunu açıklayınız.

$x_n$ dizisi a noktasına yakınsaksa her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $n_o$ sayısını $n > n_o$ iken $d(x_n,a) < \varepsilon$ olacak şekilde bulabilmemiz gerekir. Ancak $d(x_n,a) = 0$ veya 1 olabileceğinden ve her zaman $1 < \varepsilon$ sağlanmayacağından $d(x_n,a) = 0$ ve böylece $n > n_o$ iken $x_n = a$ olmalıdır. Bu ise dizinin sabit dizi olmasıyla mümkündür.

**Soru 2)** $f^{-1} : Y_m \to X_d$ açık bir dönüşüm ise $f : X_d \to Y_m$ dönüşümünün sürekli olduğunu gösteriniz.

$f^{-1} : Y_m \to X_d$ açık dönüşüm olduğundan Y'deki her A açığı, $f^{-1}$ altında X'te kalan bir $f^{-1}(A)$ açık kümesine dönüşmektedir. $f : X_d \to Y_m$'nin sürekli olması için sağ taraf olan Y'den alınacak her bir açığın X'teki ters görüntüsünün de açık olduğunu göstermek gereklidir. $f^{-1}$ açık dönüşüm olduğundan yukarıda açıklandığı gibi bu şart zaten gerçeklenmektedir.

**Soru 3)** Görüntü kümesi ayrık metrik uzay olan bir f fonksiyonu sürekli midir, açık dönüşüm müdür, yoksa homeomorfizm midir? Kısaca açıklayınız.

f fonksiyonunun görüntü kümesi ayrık metrik uzay olduğundan eğer $f : X \to Y$ ise Y'deki her küme açıktır. f'in sürekli olması için Y'deki açıkların ters görüntülerinin X'te açık olması gerekir. Ancak bununla ilgili bir bilgi verilmemiş. Yani f süreklidir diyemeyiz. Bu sebeple f bir homeomorfizm de olamaz. f'in açık dönüşüm olması içinse X'teki her açığın Y'deki görüntüsünün açık olması gerekir. Y ayrık metrik olarak verildiğinden bu her zaman doğrudur.

**Soru 4)** Eşmetri dönüşümlerinin düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

Eşmetrik uzaylarda uzaklık korunmaktadır. f eşmetri dönüşümü olduğundan her $x_1, x_2 \in X$ için,

$$m(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2)$$

olacağından $\delta \leq \varepsilon$ olarak alındığında f'nin düzgün süreklilik tanımını gerçeklediği görülür.

**Soru 5)** Metrik uzaylarda düzgün süreklilikle süreklilik arasındaki ilişkiyi açıklayıp örnekleyiniz.

Metrik uzaylarda düzgün süreklilik sürekliliği gerektirir, ancak tersi doğru olmak zorunda değildir. Örnek verecek olursak Örneğin, $X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\}$ ve $Y = \mathbf{N}$ üzerinde alışılmış metriklerin olduğunu varsayalım, $f : X \to Y$, $f(x) = \frac{1}{x}$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonu süreklidir (çünkü Y ve X'in indirgenmiş metrikte, her alt kümesi açıktır), ancak f fonksiyonu düzgün sürekli değildir. Çünkü X'teki yeterince yakın noktalar Y'de yeterince yakın noktalara dönüşmemektedir.

__Not:__ *Süre 70 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***