MAT 3035 METRİK UZAYLAR II 2. ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:.. **22.12.2004**

No :..

Soru 1) X üzerinde ayrık metrik olsun. Herhangi bir A kümesinin kompakt olup olmadığını açıklayınız.

Ayrık metrik uzayda bir a noktasının 1 ya da daha küçük yarıçaplı açık komşuluğu sadece merkezdeki noktadan oluşacağından, $\mathcal{A} = \{D(a,1): a \in A\}$ ailesi A kümesinin bir açık örtüsüdür. Ancak A kümesi sonlu değilse bu ailenin sonlu bir alt örtüsü bulunamaz. Bu yüzden sadece A sonlu bir küme iken kompakt olur.

Soru 2) (X,d) metrik uzayı kompakt ve $f: X_d \to Y_m$ sürekli ise Y uzayı da kompakt mıdır, açıklayınız.

Hayır. Sadece $F(X) \subset Y$ görüntü kümesinin kompakt olduğu teorem gereği söylenebilir. Tabii f örten bir dönüşüm olduğunda $f(X) = Y$ olacağından ancak bu durumda Y de kompakttır diyebiliriz.

Soru 3) (X,d) ayrık metrik uzay ve Y boş olmayan bir altküme ise Y tam uzay olur mu? Açıklayınız.

Ayrık metrik uzaydaki her kümenin hem açık hem de kapalı olduğunu biliyoruz. Aynı zamanda ayrık metrik uzay tam uzaydır. Tam uzaylarda sadece kapalı alt uzayların tam olduğu sonucuna göre boş olmayan her altküme kapalı olacağından aynı zamanda tam da olur.

Soru 4) $f: X_d \to Y_m$ homeomorfizminin tersinin bir açık dönüşüm olup olmayacağını açıklayınız.

f bir homeomorfizm ise, f birebir, örten, f ve f^{-1} süreklidirler. $f:X \to Y$ sürekli olduğundan varış uzayı olan Y'deki açıkların ters görüntüleri X'de açık olacaktır. Yani Y'deki açıklar, X'deki açıklara gider. Bu da f^{-1}'in açık dönüşüm olduğunu belirtir.

Soru 5) $f: X_d \to Y_m$, $f(x) = x$ özdeşlik fonksiyonunun X ve Y üzerindeki metrikler ne olursa olsun sürekli olduğunu gösteriniz.

Her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $x_0 \in X$ noktası için $d(x,x_0) < \delta$ iken $m(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde bulunması gerekmektedir. $f(x) = x$ ve $f(x_0) = x_0$ olduğundan

$$m(f(x),f(x_0)) = d(x,x_0)$$

olur ve $m(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$ olması için $\delta \le \varepsilon$ seçmek yeterlidir.

<u>**Not:**</u> *Süre 70 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***