MAT3014 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ II 1.ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:…CEVAP ANAHTARI........... **06.04.2005**

No :..

Soru 1) Değişmeli bir grupta ikinci mertebeden elemanların kümesinin bir altgrup olduğunu gösteriniz.

G grubundaki ikinci mertebeden elemanların kümesini H ile gösterelim. a ve b, H'ın iki elemanı olsun. $ab^{-1} \in$ H olduğunu göstermeliyiz. $a^2 = b^2 = e$ olduğunu biliyoruz. O halde $a = a^{-1}$ ve $b = b^{-1}$ yazabiliriz. G'nin değişmeliliğini kullanarak

$$(ab^{-1})^2 = ab^{-1}ab^{-1} = abab = a^2b^2 = e.e = e$$

elde ederiz ki bu da, ab^{-1} etkisiz eleman olamayacağından, ab^{-1} elemanının mertebesinin 2 olduğunu gösterir. Yani $ab^{-1} \in$ H olur ve H<G elde edilir.

Soru 2) *G* bir grup olsun. a, b $\in$ *G* için a'nın ve b'nin mertebesi sırasıyla 3 ve 6 ise ab elemanının mertebesi hakkında ne söylenebilir? Kısaca açıklayınız.

G değişmeli değilse ab'nin mertebesi sonsuzdur. Çünkü $a^3 = b^6 = e$ olduğunu kullanabilmek için 3 tane a elemanını ve 6 tane b elemanını yan yana getirebilmek gerekir. G değişmeli ise ab elemanının mertebesi 6'dır. Çünkü

$$(ab)^6 = abababababab = a^6b^6 = (a^3)^2b^6 = e^2.e = e$$

dir.

Soru 3) $\varphi : G \to G$ bir otomorfizm ise φ'nin çekirdeği hakkında neler söylenebilir? Kısaca açıklayınız.

φ bir otomorfizm olduğundan birebirdir. Dolayısıyla teorem gereği, çekirdeği tek elemandan yani e den oluşmak zorundadır.

Soru 4) *G* bir grup ve *g* $\in$ *G* olsun. Eğer $g^{20} = e$ ise *g* elemanının ve *G* grubunun mertebeleri neler olabilir? Kısaca açıklayınız.

$g^{20} = e$ ise g'nin mertebesi 20'nin bir pozitif böleni olmalıdır. Yani 1, 2, 4, 5, 10 veya 20 olabilir. G grubunun mertebesi de elemanın mertebesine bölüneceğinden bu sayılardan birine bölünebilen bir doğal sayıdır.

Soru 5) $\varphi : Z \to 4Z$, $n \to 4n$ dönüşümünün türünü belirleyiniz. Çekirdeğini bulunuz. Çekirdek kaç elemanlıdır? Z/4Z bölüm grubunu belirleyiniz.

φ dönüşümü 1:1 ve örtendir ve işlem korur. Yani bir izomorfizmdir.

$$\text{Ker } \varphi = \{n \in \mathbf{Z} : \varphi(n) = 4n = 0\} = \{0\}$$

olduğu açıktır. Tabii ki çekirdek tek elemanlıdır. **Z**'nin 4**Z** ile bölüm grubu {4**Z**, 1+4**Z**, 2+4**Z**, 3+4**Z**} olacağından 4 elemanlı C_4 devirli grubuna izomorftur.

Not: *Süre 70 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***