

# MAT 2008 METRİK UZAYLAR FİNAL SORULARI

09.08.2005

Ad-Soyad:.....

No :.....

**Soru 1)** Bir  $(X,d)$  metrik uzayında  $A \subset B$  olsun. Eğer  $B$  kümesi bir  $p$  noktasının komşuluğu ise  $A$  kümesi de  $p$  noktasının bir komşuluğu mudur? Açıklayınız.

Hayır.  $B$  kümesi  $p$  nin bir komşuluğudur demek  $p \in T \subset B$  olacak şekilde bir  $T$  açık kümesi var demektir.  $A \subset B$  iken bu  $T$  açık kümesi  $A$  da kalmayabilir.

Ancak  $B$  komşuluk iken  $B \subset C$  olacak şekildeki her  $C$  kümesi de  $p$  nin bir komşuluğu olmak zorundadır.

**Soru 2)**  $R$  alışımlı ve ayrık metrik uzaylarında  $Q'$  irrasyonel sayılar kümesinin içini, dışını ve sınırını açıklayarak belirleyiniz.

$R$  alışımlı metrik uzayında  $Q'$  irrasyonel sayılar kümesinin içi boş kümedir. Çünkü  $x$  bir irrasyonel sayı ise  $x$  in bir iç nokta olabilmesi için  $x \in D(x, r) \subset Q'$  olacak şekilde bir  $D(x, r)$  açık aralığının bulunabilmesi gereklidir. Ancak hiç bir reel sayı aralığı sadece irrasyonel sayılardan oluşamayacağından bu mümkün değildir.

Benzer şekilde  $Q'$  kümesinin dışı, tümleyeni olan rasyonel sayılar kümesinin içi olacağından boş kümedir.

Sonuçta  $Q'$  nün içi ve dışı boş olduğundan sınırı uzayın geri kalanıdır, yani  $R$  dir.

$R$  ayrık metrik uzayında  $Q'$  irrasyonel sayılar kümesinin içi kendisidir. Çünkü ayrık metrikte her küme açıktır ve açık kümeleri içi kendileridir.

Benzer şekilde  $Q'$  kümesinin dışı, tümleyeni olan rasyonel sayılar kümesinin içi olacağından yine aynı sebeple dış, tümleyene yani  $Q$  rasyonel sayılar kümesine eşittir.

Sonuçta  $Q'$  nün içi  $Q'$  ve dışı  $Q$  olduğundan sınırı uzayın geri kalanıdır, yani boşkümedir.

**Soru 3)** Bir  $(X,d)$  metrik uzayında "A açık kümedir  $\Leftrightarrow$  A açık yuvardır" önermesinin doğruluğunu tartışınız. Örnek veriniz.

A açık küme ise bir açık yuvar olmayabilir. Örneğin reel alışımlı uzayda  $A = (0,1) \cup (2,3)$  kümesi açık bir küme olmakla beraber açık bir yuvar değildir.

A açık bir yuvar ise açık bir kümedir de. Gerçekten de,  $A = D(a, r)$  açık yuvarı ise her bir  $x \in A$  için  $x \in D(a, r) \subset D(a, r) = A$  yazılabileceğinden  $x$  bir iç noktadır. Her  $x$  elemanı bir iç nokta olduğundan  $A$  açıktır.

**Soru 4)**  $d(A,B) = 0$  olması durumunda  $A$  ve  $B$  kümeleri kesişir mi? Örnek veriniz.

Kesişmeyebilirler. Örneğin reel alışımlı uzayda  $A = (0,1)$  ve  $B = [1,2)$  kümeleri kesişmez ama aralarındaki uzaklık sıfırdır.

**Soru 5)** Reel alışımlı uzayda  $Q$  rasyonel sayılar kümesinin yığılma noktaları kümesini belirleyiniz.

$x$  reel sayı olsun.  $x$  i bulduran her aralıkta mutlaka en az bir rasyonel sayı daha olacağından  $x$  bir yığılma noktasıdır. Dolayısıyla  $Q$  nun yığılma noktaları kümesi  $R$  nin tamamıdır.

**Not:** Süre 70 dakıkadır. Başarılar. **İNC**