MAT 3035 METRİK UZAYLAR II 2. ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:…CEVAP ANAHTARI.......... **22.12.2005**

No :..

Soru 1) A = (0,2] kümesinin ayrık metriğe göre bağlantılılığını inceleyiniz.

Ayrık metriğe göre tüm kümelerin hem açık hem de kapalı olduklarını biliyoruz. Dolayısıyla G = (0,1) ve H = [1,2] seçersek G ve H, birleşimleri A ve kesişimleri boşküme olan ve her biri A ile kesişen iki açık kümedir. Yani G ve H, A nın bir ayrışımıdır. Sonuç olarak A kümesi ayrık metrikte bağlantılı değildir.

Soru 2) (X,d) metrik uzayında bağlantılı iki kümenin birleşimi bağlantılı olur mu? Örnek vererek açıklayınız.

Olabilir de olmayabilir de.
Örnek olarak (R,d) alışılmış reel uzay olsun. A = (0,1) ve B = (2,3) kümeleri bağlantılı olmasına karşın birleşimleri bağlantılı değildir. Ama aynı uzayda A = (0,2) ile B = (1,3) kümelerini alırsak A ile B'nin birleşimi (0,3) bağlantılı kümesidir.

Soru 3) (X,d) metrik uzayında ayrılmamış bağlantılı iki kümenin birleşimi bağlantılı olur mu? Açıklayınız.

Olur. Tersine A ve B ayrılmamış bağlantılı kümelerinin birleşimi bağlantısız olsaydı; $A \cup B$ nin G ve H açık kümelerinden oluşan bir ayrışımı olurdu. A bağlantılı olduğundan ya G'de ya da H'ta kalırdı. B de benzer şekilde. Eğer A, G'de, B ise H'ta kalsa (ya da tam tersi) bu durumda

$(A \cup B) \cap G = A$, $(A \cup B) \cap H = B$

olurdu ve bu G ve H kümelerinin $A \cup B$'nin bir ayrışımı oluşu ile çelişirdi.

Soru 4) X = {a,b,c,d,e} üzerinde $\tau = \{\phi, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ topolojisi ve A = {a,c,e} kümesi veriliyor. A kümesinin içini, dışını, sınırını, yığılma noktalarını ve kapanışını belirleyiniz.

A'nın içi {a,c},
A'nın dışı {b},
A'nın sınırı {d,e},
A'nın yığılma noktaları kümesi {d,e},
A'nın kapanışı {a,c,d,e}

Soru 5) X = {a,b,c,d} üzerinde $\tau = \{\phi, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ topolojisi ve Y = {x,y,z,t} üzerinde $\mu = \{\phi, Y, \{x\}, \{z\}, \{x,z\}, \{x,y,z\}\}$ topolojisi verilsin. f fonksiyonu $a \to y$, $b \to x$, $c \to y$ ve $d \to x$ şeklinde olsun. f sürekli midir? Açıklayınız.

$f^{-1}(\phi) = \phi$, $f^{-1}(Y) = X$, $f^{-1}(\{x\}) = \{b,d\}$, $f^{-1}(\{z\}) = \phi$, $f^{-1}(\{x,z\}) = \{b,d\}$, $f^{-1}(\{x,y,z\}) = \{a,b,c,d\}$ olduğundan tüm π-açık kümelerin f altındaki ters resimleri τ-açık değildir. Örneğin {x} açığının ters görüntüsü olan {b,d}, τ'da değildir. Dolayısıyla f sürekli değildir.

Not: *Süre 60 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***