MAT 2008 METRİK UZAYLAR ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:…CEVAP ANAHTARI **07.04.2006**

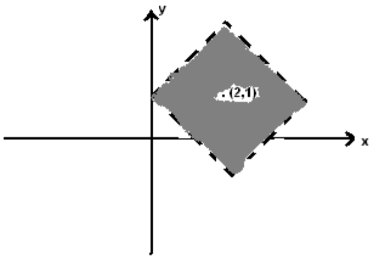
No :..

Soru 1) R^2 üzerinde $x=(x_1,x_2)$ ve $y=(y_1,y_2)$ için

$$d(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$$

metriğine göre (2,1) merkezli 2 yarıçaplı D((2,1),2) açık komşuluğunu belirleyip çiziniz.

$D((2,1),2) = \{(x_1,x_2) : |x_1-2| + |x_2-1| < 2\}$ şeklindedir. Mutlak değerlerin içindeki ifadelerin pozitif veya negatif olmalarına bağlı olarak 4 durum incelendiğinde aşağıdaki şekil elde edilir:



Soru 2) R^2 üzerinde $x=(x_1,x_2)$ ve $y=(y_1,y_2)$ için

$$d(x,y) = \min\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$$

fonksiyonu bir metrik midir? Açıklayınız.

$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \min\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} = 0$ olması durumunda $|x_1-y_1|$ ve $|x_2-y_2|$'den sadece biri 0 olsa da $d(x,y) = 0$ olabilir. Dolayısıyla $x=y$ olmak zorunda değildir. Yani M2 şartı sağlanmayacağından d fonksiyonu bir metrik olmak zorunda değildir.

Soru 3) Ayrık metrik uzayda aralarındaki uzaklık sıfır olan ayrık iki küme bulabilir misiniz? Açıklayınız.

Tanım gereği ayrık metrikte iki küme ne kadar yakın olursa olsun kesişmedikleri taktirde aralarındaki uzaklık 1 dir. Yani ayrık iki küme arasındaki uzaklık sıfır olamaz, 1 dir.

Soru 4) (X,d) bir metrik uzay ise

$$m(x,y) = 5 + d(x,y)$$

şeklinde tanımlanan m fonksiyonu X üzerinde bir metrik olur mu? Açıklayınız.

$m(x,y) = 0 \Leftrightarrow 5+d(x,y) = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = -5$ olması gerekir ki d bir metrik olduğundan bu mümkün değildir.

Soru 5) B([1,2]) kümesi üzerinde

$$d(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)| : x \in [1,2]\}$$

metriğine göre $f(x) = 3x^2-4x+1$ ve $g(x) = x^2+2x-3$ fonksiyonları arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

$$|f(x) - g(x)| = |\ 3x^2-4x+1 - (x^2 +2x-3)|$$
$$= |\ 2x^2-6x+4|$$

olup [1,2] aralığındaki sup değerini ya aralık içinde bir noktada ya da uç noktalardan birinde alır. Türev alındığında, $4x-6 = 0$ dan ekstremum değerin $x = 3/2$'de alındığı görülür. Bu değer [1,2] aralığında kaldığından, sup değeri ya 1, ya 3/2 ya da 2'de elde edilir. $x = 1$ için $|f(x)-g(x)| = 0$, $x = 3/2$ için $|f(x)-g(x)| = ½$ ve $x = 2$ için de $|f(x)-g(x)| = 0$ olduğundan ekstremum değer 1/2'dir.

<u>Not:</u> *Süre 60 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***