

Ad-Soyad: ...CEVAP ANAHTARI

No :

Soru 1) $C_5 \times C_5$ direk çarpım grubunda hangi mertebelerden kaçar eleman bulunduğunu belirleyiniz.

$C_5 \times C_5$ grubu 25 elemanlıdır. O halde Lagrange teoreminin sonucu olarak bulundurduğu elemanların mertebeleri 1, 5 veya 25 olabilir. Mertebesi 25 olan bir eleman olsaydı grubu ürettirdi ve bu grup C_{25} devirli grubuna izomorf olurdu. Halbuki 5 ile 5 aralarında asal olmadıkları için bu mümkün değildir. Mertebesi 1 olan tek eleman e olduğundan geriye kalan 24 elemanın mertebesi 5 olur.

Soru 2) Bir R halkasında $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ özdeşliği her zaman geçerlimidir? Açıklayınız.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a.a + a.b + b.a + b.b \\ = a^2 + a.b + b.a + b^2$$

olup $a.b = b.a$ olması durumunda bu özdeşlik geçerli olacağından R halkasının değişmeli olması durumunda özdeşliğin de geçerli olacağı açıktır.

Soru 3) S_3 grubunun değişmeli olmadığını gösteriniz.

$S_3 = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$ şeklinde olup a, eşkenar üçgenin 120 derecelik döndürülmesi, b ise herhangi bir simetri ekseninde yansıması alınabilir. $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ve $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ olsun.

$$a.b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } b.a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ olup değişme özelliğini}$$

sağlamayan iki eleman bulduğumuzdan grup değişmeli değildir.

Soru 4) 16 elemanlı cismin elemanlarını belirleyiniz.

16 elemanlı cisim 2 elemanlı $GF(2) = \{0, 1\}$ cismine dördüncü dereceden indirgenemeyen bir polinomun bir α kökü katılarak elde edilebilir. Yani

$$GF(2^4) = \{a+b\alpha+c\alpha^2+d\alpha^3 : a, b, c, d \in GF(2)\} \\ = \{0, 1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, 1+\alpha, 1+\alpha^2, 1+\alpha^3, \alpha+\alpha^2, \alpha+\alpha^3, \\ \alpha^2+\alpha^3, 1+\alpha+\alpha^2, 1+\alpha+\alpha^3, 1+\alpha^2+\alpha^3, \alpha+\alpha^2+\alpha^3, \\ 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3\}$$

olur.

Soru 5) $GF(9)$ cismi, $GF(3)$ cismine x^2+x+2 polinomunun bir kökü olan α katılarak elde edilmiş olan $\{0,1,2,\alpha,1+\alpha,2+\alpha,2\alpha,1+2\alpha,2+2\alpha\}$ cismi olsun. Bu cisimdeki elemanların terslerini belirleyiniz.

$1^{-1} = 1$ olduğu aşikârdır. $2 \cdot 2 = 1$ (3) olduğundan $2^{-1} = 2$ de açıktır. α 'nın tersini bulmak için $\frac{1}{\alpha} = \frac{-\alpha^2 - \alpha - 1}{\alpha} = -\alpha - 1 - \frac{1}{\alpha}$ olduğundan $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2}(-\alpha - 1) = \frac{1}{-1}(-\alpha - 1) = 1 + \alpha$ elde edilir.

Benzer olarak $\frac{1}{2+\alpha} = \frac{-\alpha^2 - \alpha - 1}{2+\alpha} = \frac{-\alpha^2 + 2\alpha - 1}{-1+\alpha}$ olup $-\frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{\alpha - 1} = -(\alpha - 1) = 1 - \alpha = 1 + 2\alpha$ elde edilir. Son

olarak $(2\alpha)^{-1} = 2 + 2\alpha$ olarak elde edilir.