MAT 3008 TOPOLOJİ ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:…………………………......... **02.08.2006**

No :..

Soru 1) Bir X kümesi üzerindeki ayrık topolojinin kapalı kümelerinin ailesini belirleyiniz.

τ = P(X) olduğu veriliyor. Dolayısıyla X'in her alt kümesi açıktır. Herhangi bir A kümesinin tümleyeni de bir küme olup açık olacağından A kapalı da olacaktır. Yani her küme aynı zamanda kapalıdır da. Dolayısıyla aranan kapalı kümeler ailesi de P(X)'in tamamı olacaktır.

Soru 2) Sonlu öğeli bir X kümesi üzerinde bir τ topolojisi veriliyor. Eğer her $x \in X$ için $\{x\} \in \tau_K$ ise τ topolojisinin ayrık topoloji olduğunu gösteriniz.

τ'nun ayrık topoloji olduğunu göstermek için X'in her alt kümesinin τ'da kaldığını göstermeliyiz. Yani τ = P(X) olduğunu. Ancak bu da tüm alt kümelerin kapalı olduğunu göstermek demektir. Tek nokta kümelerinin kapalı oldukları veriliyor. Sonlu bir küme üzerinde çalıştığımızdan her alt küme tek nokta kümelerinin, yani kapalı olduğunu bildiğimiz kümelerin birleşimi olarak düşünüldüğünde kapalı olacaktır.

Burada X sonlu olmasaydı, kapalıların keyfi birleşimi kapalı olmayabileceğinden aynı sonuca ulaşamazdık.

Soru 3) Sonlu bir X kümesi üzerindeki sonlu tümleyenler topolojisinin X üzerindeki ayrık topoloji olduğunu gösteriniz.

X sonlu olsun. X üzerindeki sonlu tümleyenler topolojisini τ ile gösterelim. τ'nun ayrık topoloji olduğunu göstermek için τ = P(X) olduğunu göstermeliyiz. $\tau = \{\phi\}\cup\{A\subset X: A'=X\setminus A \text{ sonlu}\}$ olduğundan ϕ ve tümleyeni sonlu olan her kümenin açık olduğunu biliyoruz. Ancak X sonlu olduğundan her kümenin tümleyeni sonlu olacaktır. Yani her küme topolojinin elemanıdır. Bu da τ = P(X) olmasıyla mümkündür.

Soru 4) X={a,b,c,d} ve Y={x,y,z,w} kümelerinin üzerinde sırasıyla $\tau=\{\phi,X,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ ve $\pi=\{\phi,Y,\{x\},\{y\},\{x,y\},\{y,z\},\{x,y,z\},\{y,z,w\}\}$ topolojileri olsun. $f:X_\tau\to Y_\pi$, $a\to y$, $b\to z$, $c\to w$ ve $d\to w$ fonksiyonu a noktasında süreksizdir. Nedenini açıklayınız. f'yi a noktasında sürekli yapmak için τ topolojisinde ne gibi bir değişiklik yapmak gerekir?

f(a)=y olduğundan y'yi bulunduran açık kümelerin, yani Y,{y},{x,y},{x,y,z} ve {y,z,w}'nın ters görüntülerinin τ topolojisinde kalıp kalmadıklarına bakılmalıdır. $f^{-1}(\{x,y,z\}) = \{a,b\}\notin\tau$ olup f, a noktasında sürekli değildir. Diğer kümelerin tersleri τ topolojisinde kaldığından f'nin sürekli olması için {a,b}'nin eklenmesi gerekir. Ancak {b,c} de τ'da olduğundan $\{a,b\}\cap\{$ yeterlidir.

Soru 5) X={a,b,c,d,e} kümesi üzerinde $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\},\{a,b,e\}\}$ topolojisinin bulunduğunu varsayalım. A={a,b,c} kümesinin içini, dışını, sınırını, yığılma noktalarını ve kapanışını bulunuz.

a ve b birer iç noktadır, çünkü $a, b \in \{a,b\} \subset \{a,b,c\}$'dir. Ancak $c \in T \subset \{a,b,c\}$ olacak şekilde bir T açığı olmadığından c bir iç nokta değildir.

$A' = X\setminus A = \{d,e\}$'dir. Bu kümenin iç noktaları A kümesinin dış noktaları olur. Ancak d veya $e \in T \subset \{d,e\}$ olacak şekilde bir T açığı olmadığından d veya e, A' kümesi için bir iç nokta değildir. Yani dış nokta yoktur.

A'nın içi, dışı ve sınırının ayrık birleşimi X uzayına eşit olduğundan A kümesinin sınırı {c,d,e} kümesidir.

$a \in X$ bir yığılma noktası değildir. Çünkü $\{a\} \in \tau$ olup $(\{a\}\setminus\{a\})\cap A = \phi\cap A = \phi$'dir. Diğer noktalar için $(T\setminus\{x\})\cap A = \phi$ olacak şekilde bir $T \in \tau$ olmadığından yığılma noktaları kümesi {b,c,d,e}'dir. Dolayısıyla $\overline{A}$ = X elde edilir.

Not: *Süre 60 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***