MAT 3035 METRİK UZAYLAR II 1. ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:…………………………........... **07.12.2006**

No :..

Soru 1) f: $X_d \to Y_m$ açık bir fonksiyon olsun. f^{-1} fonksiyonu hangi şartlar eklenirse bir homeomorfizm olur?

f açık bir fonksiyon olduğundan açıkları açıklara götürmektedir. Yani bir homeomorfizm olması için f 'in sürekli, birebir ve örten de olması gerekli ve yeterlidir.

Soru 2) f: $X_d \to Y_m$ sürekli bir fonksiyon ise aynı zamanda dizisel sürekli de olduğunu gösteriniz.

f fonksiyonunun $x_o \in X$ noktasında sürekli olduğunu varsayalım ve (x_n), X_d uzayında $(x_n) \to x_o$ özelliğindeki herhangi bir dizi olsun. O halde verilen her $\varepsilon>0$ sayısı için $f(D_d(x_o, \delta)) \subset D_m(f(x_o), \varepsilon)$ olacak biçimde bir $\delta>0$ sayısı vardır. Diğer yandan $(x_n) \to x_o$ olduğundan öyle bir n_o doğal sayısı vardır ki her $n \geq n_o$ için $x_n \in D_d(x_o, \delta)$ ve dolayısıyla $f(x_n) \in D_m(f(x_o), \varepsilon)$ olur, yani her $n \geq n_o$ için $m(f(x_n), f(x_o))<\varepsilon$ olur, ki bu eşitsizlik $f(x_n) \to f(x_o)$ olduğunu gösterir.

Soru 3) Kapalılığın bir metrik değişmezi olup olmadığını tartışınız.

f: $X_d \to Y_m$ bir homeomorfizm olsun. Homeomorfizmler kendi ve tersi sürekli fonksiyonlar olduğundan her iki yönde de açık kümeler ve kapalı kümeler, yine açık ve kapalı kümelere giderler. Yani kapalılık homeomorfizmler altında korunur. Dolayısıyla bir metrik değişmezidir.

Soru 4) Bir X_d metrik uzayında (x_n) bir Cauchy dizisi olsun. (x_{n_i}) bir altdizi ise (x_n) yakınsak $\Leftrightarrow$ (x_{n_i}) yakınsak olduğunu gösteriniz.

(x_n) yakınsak iken her bir altdizisinin de yakınsak olduğu her uzayda doğrudur. Tersini görelim.

$(x_{n_i}) \to a$ olduğunu varsayalım ve herhangi bir $\varepsilon>0$ sayısı verilsin. (x_n) bir Cauchy dizisi olduğundan her $m,n \geq n_o$ için $d(x_n,x_m)<\varepsilon$ olacak biçimde bir n_o doğal sayısı ve her $n \geq m_o$ için $d(x_{n_i},a)<\varepsilon$ olacak biçimde bir m_o doğal sayısı vardır. $N = \max\{n_o,m_o\}$ olarak seçilirse, her $n \geq N$ için $d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_i}) + d(x_{n_i},a) < 2\varepsilon$, yani $(x_n) \to a$ olur.

Soru 5) R^2 alışılmış uzayında $A = \{(x,y): x \geq 0, y \geq 0\}$ kümesi kompakt mıdır? Açıklayınız.

A kümesi düzlemin birinci bölgesidir. Eğer A kümesinin bir açık örtüsü olarak $\{D((m,n),1): m, n \in$ □$\}$ ailesini alırsak bu bölgeyi 1 yarıçaplı disklerle örtebiliriz. Ancak bu disklerin sonlu tanesiyle A örtülemeyeceğinden A kümesinin sonlu bir altörtüsü olmayan bir açık örtüsünü bulmuş oluruz ki bu da A kümesinin kompakt olmadığını gösterir.