MAT 3013 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ I 2.ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:....CEVAP ANAHTARI **21.12.2006**

No :..

Soru 1) a ve b tek tamsayılar ise a^2+b^2 toplamının bir tam kare olamayacağını gösteriniz.

a = 2n+1 ve b = 2m+1 (m,n tamsayı) olsun.

$$a^2+b^2 = (2n+1)^2+(2m+1)^2 = 4(n^2+m^2+n+m)+2$$

olur. Yani a^2+b^2 toplamının 4 ile bölümünden kalan 2 olur. Ancak bir sayının karesinin 4 ile bölümünden kalanın sayı tek ise 1; çift ise 0 olduğu bilindiğinden hiç bir zaman bir sayının karesinin 4 ile bölümünden kalan 2 olamaz.

Soru 2) p ve q farklı asal sayılar olsun. $n = p^{\alpha}q^{\beta}$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \geq 1$ olmak üzere $s(n^2) = 81$ ise $s(n^3)$ sayısını hesaplayınız.

$n^2 = p^{2\alpha}q^{2\beta}$ olup $s(n^2) = (2\alpha+1)(2\beta+1) = 81$ verilmiş. Verilen şartlara göre mümkün olan durumlar $2\alpha+1 = 3$ ve $2\beta+1 = 27$ veya $2\alpha+1 = 27$ ve $2\beta+1 = 3$ durumlarıdır. Bunlardan ilkinde $\alpha = 1$ ve $\beta = 13$; ikincide ise $\alpha = 13$ ve $\beta = 1$ olur. $n^3 = p^{3\alpha}q^{3\beta}$ olup her iki halde de $s(n^3) = (3\alpha+1)(3\beta+1) = 4\cdot40 = 160$ veya $40\cdot4 = 160$ elde edilir.

Soru 3) $p>2$ sayısı iki tam karenin toplamı şeklinde ifade edilebilen bir asal sayı ise $\varphi(p)$'nin 4'ün katı olduğunu gösteriniz.

Eğer p asal sayısı iki tam karenin toplamı şeklinde ifade edilebilen bir asal sayı ise n bir doğal sayı olmak üzere $p = 4n+1$ şeklindedir. $\varphi(p) = p-1$ olduğundan $\varphi(p) = (4n+1)-1 = 4n$ olur.

Soru 4) ax+by = a+c denkleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter şartın ax+by = c denkleminin çözülebilir olması olduğunu gösteriniz.

ax+by = c denkleminin çözülebilme şartı (a,b) = d denilirse d|c olmasıdır. Benzer şekilde ax+by = a+c denkleminin çözülebilme şartının da d|(a+c) olduğu bilinmektedir. O halde göstermemiz gereken $d|c \Leftrightarrow d|(a+c)$ ifadesidir. Ancak d = (a,b) olduğundan d|a ve d|b olduğu açıktır. d|c olduğu da hatırlanırsa d|(a+c) olduğu görülür.

Soru 5) (a,m), (b,m) veya (c,m)'den en az biri 1 ise $ax + by + cz \equiv d \quad (m)$ kongrüansının m^2 tane çözümü olduğunu gösteriniz.

(a,m) = 1 olsun. O halde verilen üç değişkenli kongrüansı $ax \equiv d-by-cz \ (m)$ olarak düşünürsek sağ tarafın sabit her bir değeri için bu x'e göre tek değişkenli bir kongrüans olur ve (a,m) = 1 varsaydığımız için birtek çözüme sahiptir. Tabii ki d-by-cz ifadesi, m modunda x ve y'nin herbirisinin m tane farklı değeri olacağından m.m = m^2 tane farklı değer alabilir ve bu değerlerin herbirisi için kongrüans bir tek çözüme sahip olacağından toplam m^2 tane çözüme sahip olur.

Not: Süre 70 dakikadır. Başarılar... İNC