

MAT 4061 GALOIS TEORİSİ FİNAL SORULARI

Ad-Soyad : ...CEVAP ANAHTARI.....

17.01.2007

No :

Soru 1) Bir halkada n-inci dereceden bir polinomun kaç kökü olabilir? Örneklerle açıklayınız.

Halka aynı zamanda bir cisim ise, polinomun derecesi n olduğunda tam n tane kökü vardır. Örneğin R reel sayılar cisminde n-inci dereceden bir polinomun en çok n kökü olduğu cebirin temel teoremi olarak bilinir.

Halka cisim özelliklerine sahip değilse kök sayısı n den fazla olabilir. Örneğin Z_{12} halkasında $x^2-1 = 0$ polinomunun 1, 5, 7 ve 11 olmak üzere dört kökü vardır.

Soru 2) R bir tamlık bölgesi değilken $\partial(fg) = \partial(f) + \partial(g)$ formülünün, $R[x]$ 'de yanlış olabileceğini gösteriniz.

Örneğin \mathbb{Z}_6 bir tamlık bölgesi değildir. Bu halkada $f(x) = 2x^2+1$, $g(x) = 3x^2+1$ alınırsa $\partial(f) + \partial(g) = 2+2 = 4$ olur. Ancak $(f.g)(x) = 6x^4+5x^2+1$ olup \mathbb{Z}_6 'da bu polinom $(f.g)(x) = 5x^2+1$ halini alır ki bu durumda $\partial(fg) = 2$ olur.

Soru 3) Bir R halkasındaki her maksimal I ideali bir asal ideal midir?

I bir maksimal ideal ise R/I bir cisimdir. Her cisim bir bölge olduğundan R/I da bir bölgedir. O halde I bir asal idealdir.

Soru 4) $x^4 + 8x^3 + x^2 - 6x + 12 = 0$ denklemini çözmek için kullanılan 3. derece (düşürülmüş) polinomu bulunuz.

x yerine $x - \frac{a_{n-1}}{na_n} = x-2$ dönüşümü yapılırsa aranan polinomun $x^4 - 23x^2 + 62x - 20 = 0$ olduğu görülür.

Soru 5) $GF(16)$ 'nın elemanlarını belirleyiniz. $\alpha+1$ elemanının çarpımsal tersini bulunuz.

$GF(16)$, $GF(2)=\{0,1\}$ 'in 4. dereceden bir genişlemesidir. $Z_2[x]$ 'de x^4+x+1 indirgenemez polinomunun bir kökü α olsun. O halde

$$GF(16) = \{a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 \mid a, b, c, d \in GF(2)\}$$

$$= \{0, 1, \alpha, \alpha+1, \alpha^2, \alpha^2+1, \alpha^2+\alpha, \alpha^2+\alpha+1,$$

$$\alpha^3, \alpha^3+1, \alpha^3+\alpha, \alpha^3+\alpha+1, \alpha^3+\alpha^2,$$

$$\alpha^3+\alpha^2+1, \alpha^3+\alpha^2+\alpha, \alpha^3+\alpha^2+\alpha+1\}$$

bulunur. $\alpha+1$ 'in tersi ise

$$(\alpha+1)^{-1} = \frac{1}{\alpha+1} = \frac{\alpha^4 + \alpha}{\alpha+1}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha^2 - \alpha + 1)}{\alpha+1} = \alpha(\alpha^2 - \alpha + 1)$$

$$= \alpha(\alpha^2 + \alpha + 1) = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha$$

şeklindedir.

Not: Süre 70 dakikadır. Başarılar. **İNC**