

Ad-Soyad:.....

No :.....

Soru 1) G bir grup ve a, b iki eleman olsun. Bu durumda herhangi bir pozitif n tamsayısı için $(aba^{-1})^n = ab^n a^{-1}$ olduğunu gösteriniz.

$$\begin{aligned} (aba^{-1})^n &= aba^{-1}aba^{-1}aba^{-1} \dots aba^{-1} \\ &= abbb \dots ba^{-1} \\ &= ab^n a^{-1} \end{aligned}$$

olduğu açıktır.

Soru 2) p asal sayı iken Z_p grubunda tersi kendisine eşit olan elemanları belirleyiniz?

$x \equiv x^{-1} \pmod{p}$ olsun. Bu durumda $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ olur. Yani p asalı $x^2 - 1$ farkını böler. Bir başka deyişle

$$p \mid (x-1)(x+1)$$

olur. p 'nin asal oluşu gereği $p \mid (x-1)$ ya da $p \mid (x+1)$ olur. Bu da ancak $x \equiv 1 \pmod{p}$ veya $x \equiv -1 \equiv p-1 \pmod{p}$ olmasıyla mümkündür. Sonuç olarak Z_p grubunda tersi kendisine eşit olan sadece 2 eleman vardır: 1 ve $p-1$.

Soru 3) S_7 simetrik grubunun $x = (1\ 2)(3\ 5\ 7)$ elemanının mertebesini ve ürettiği altgrubun elemanlarını bulunuz.

$$\begin{aligned} x &= (1\ 2)(3\ 5\ 7) \\ x^2 &= (1)(2)(3\ 7\ 5) \\ x^3 &= (1\ 2)(3)(5)(7) \\ x^4 &= (1)(2)(3\ 5\ 7) \\ x^5 &= (1\ 2)(3\ 7\ 5) \\ x^6 &= (1)(2)(3)(5)(7) = e \end{aligned}$$

olup mertebesi 6'dır. x 'in yukarıdaki kuvvetleri de x 'in ürettiği altgrubun elemanlarıdır.

Soru 4) G değişmeli bir grup ve n belli bir pozitif tamsayı olsun.

$$H = \{ a \in G \mid \text{bir } x \in G \text{ için } a = x^n \}$$

kümesi G 'nin bir altgrubu mudur?

$a, b \in H$ olsun. $a.b \in H$ ve $a^{-1} \in H$ olduğunu göstermek gerekir.

$a, b \in H$ ise $a = x^n$ ve $b = y^n$ olacak şekilde G grubunda iki x ve y elemanı mevcuttur. $a.b = x^n.y^n$ olup G değişmeli olduğundan $a.b = (x.y)^n$ elde edilir. G bir grup olup kapalı olduğundan $x.y \in G$ olur ve bu sebeple $a.b \in H$ olur.

İkinci olarak $a \in H$ olsun. $a = x^n$ yazılabildiğinden $a^{-1} = (x^{-1})^n$ olur. $x \in G$ olup G kapalı olduğundan $x^{-1} \in G$ olur. O halde $a^{-1} \in H$ demektir.

Yani $H < G$ 'dir.

Soru 5) $Z_{19}^* = Z_{19} - \{0\}$ grubunda

$$H = \{x \mid x \equiv 1 \pmod{3}\}$$

altkümesi bir altgrup mudur?

$x, y \in H$ keyfi iki eleman olsun. H sonlu olduğundan H 'in bir altgrup olduğunu gösterebilmek için kapalı olduğunu yani $x.y \in H$ olduğunu göstermek gerekir.

$x, y \in H$ ise $x \equiv 1 \pmod{3}$ ve $y \equiv 1 \pmod{3}$ demektir. Yani a ve b tamsayılar olmak üzere $x = 1 + 3a$ ve $y = 1 + 3b$ yazılabilir. O halde

$$x.y = (1 + 3a)(1 + 3b) = 1 + 3(a+b+3ab)$$

yazılabilir. Burada $a+b+3ab$ bir tamsayı olduğundan $x.y \equiv 1 \pmod{3}$ ve $x.y \in H$ olur. Yani H bir altgruptur.

Not: Süre 70 dakikadır. Başarılar. **İNC**