MAT 3014 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ II FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:…... **31.05.2007**

No :..

Soru 1) $Z_{24} \times Z_{36}$ grubu, $Z_{12} \times Z_{72}$ grubuna izomorf mudur? Açıklayınız.

Direk çarpımlar değişmeli olduğundan ve $(m,n) = 1$ iken $Z_m \times Z_n \cong Z_{mn}$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} Z_{24} \times Z_{36} &\cong Z_3 \times Z_8 \times Z_4 \times Z_9 \\ &\cong Z_3 \times Z_4 \times Z_8 \times Z_9 \\ &\cong Z_{12} \times Z_{72} \end{aligned}$$

olacaktır.

Soru 2) *G sonlu bir grup ve o(g), g ∈ G elemanının mertebesi olsun. Eğer o(g) = |G| ise G grubu hakkında neler söylenebilir? Açıklayınız.*

Belli bir g elemanı için $o(g) = |G|$ ise bunun anlamı g elemanının mertebesinin G grubunun mertebesine eşit olduğudur. Yani g elemanının farklı kuvvetleri bize G grubunun tüm elemanlarını vermektedir. Yani g elemanı ile G grubunun tüm elemanlarını elde edebiliriz. Bu da g'nin G grubunu ürettiği anlamına gelir. Dolayısıyla G grubu bir tek elemanla üretilebiliyor demektir. Bu da G grubunun bir devirli grup olduğu anlamına gelir.

Soru 3) Bir R halkasında her a, b ∈ R için

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

özdeşliği geçerli midir? Açıklayınız.

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\ &= a.a+a.b+b.a+b.b \\ &= a^2+a.b+b.a+b^2 \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu toplamın $a^2+2ab+b^2$ toplamına eşit olması $a.b+b.a = 2ab$ ya da denk olarak $ab = ba$ olmasıyla mümkündür. Yani R halkası çarpmaya göre değişmeli ise (toplamaya göre değişmeli olduğu zaten halka tanımından biliniyor) bu özdeşlik geçerli olacaktır.

Soru 4) p asal iken Z_p halkasının bir cisim olduğunu gösteriniz.

İlk olarak Z_p'nin sıfır bölensiz olduğunu göstermeliyiz (yani bir tamlık bölgesi olduğunu). a sıfırdan farklı bir eleman olsun ve $a.b = 0$ olduğunu varsayalım. p asal olduğundan bu $ab \equiv 0 \pmod p$ anlamına gelir. Yani $p|ab$ olur. p asal olduğundan ve p, a'yı bölmeyecek şekilde alındığından p, b'yi bölmek zorundadır. Bu da $b \equiv 0 \pmod p$ anlamına gelir. Yani sıfır bölen yoktur. O halde Z_p bir tamlık bölgesidir. Her sonlu tamlık bölgesi bir cisim olduğundan Z_p bir cisimdir.

Soru 5) $\varphi : (R,+) \to (C^*, \times)$

$$t \to \cos t + i.\sin t$$

dönüşümünün türünü ve çekirdeğini belirleyiniz.

φ'nin işlem koruduğu ve dolayısıyla bir homomorfizm olduğu kolayca görülebilir. $\cos t + i.\sin t = e^{it}$ olduğundan ve üstel dönüşüm birebir olmadığından φ birebir değildir. Örten olduğu da görülebilir. Dolayısıyla φ bir epimorfizmdir.

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} \varphi &= \{ t \in R \mid e^{it} = 1\} \\ &= \{ t \in R \mid t = 2k\pi,\ k \in Z\} \end{aligned}$$

olur.

Not: *Süre 70 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***