

# MAT 2008 METRİK UZAYLAR FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:...CEVAP ANAHTARI .....

07.06.2007

No :.....

**Soru 1)** Bir  $(X,d)$  metrik uzayında sınırlı bir  $A$  kümesinin yığılma noktalarının varlığı ve sayısı hakkında fikir yürütünüz.

Bir  $x$  noktasının bir  $A$  kümesinin yığılma noktası olması için  $x$ 'in her delinmiş komşuluğunda  $A$  kümesine ait sonsuz çoklukta nokta bulunması gerekir.  $A$  sınırlı ise sonlu ya da sonsuz olabilir. Sonlu olması durumunda yukarıdaki açıklamaya göre yığılma noktası yoktur. Sonsuz ise her sınırlı sonsuz elemanlı kümenin en az bir yığılma noktası olması gerektiğinden  $A$  kümesinin en az bir yığılma noktası vardır.

**Soru 2)**  $A \subset B$  olması durumunda  $\bar{A} \subset B$  olur mu? Tartışınız.

Teorem gereği  $A \subset B$  ve  $B$  kapalı iken  $\bar{A} \subset B$  olur.  $B$  kapalı değilken  $\bar{A} \subset B$  olması kümelere ve metriğe bağlıdır. Genel bir şey söylenemez. Örneğin ayrık metrikte her küme kapanışına eşit olduğundan  $A \subset B$  iken  $\bar{A} \subset B$  olur. Alışılmış reel uzayda ise  $A = (0,2) \subset (0,2] = B$  alınırsa  $\bar{A} = [0,2]$ ,  $B = (0,2]$  kümesinin bir alt kümesi değildir.

**Soru 3)**  $(X,d)$  ayrık metrik uzayında her kapalı kümenin her noktası bir iç nokta olmak zorunda mıdır? Açıklayınız.

Ayrık metrik uzayda her kapalı küme aynı zamanda açık olduğundan her noktası bir iç nokta olacaktır.

**Soru 4)**  $\mathbb{R}^2$  üzerinde ayrık metrik bulunsun.

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3 < x \leq 6\}$$

kümesinin bu metriğe göre içini, dışını, sınırını, yığılma noktaları kümesini ve çapını bulunuz.

Uzay  $\mathbb{R}^2$  olduğundan  $A$  üzerinde  $\mathbb{R}^2$ 'den indirgenmiş metrik vardır. Bu da doğal olarak ayrık metriktir. Ayrık metrikte her kümenin içi kendisine; dışı tümleyenine eşittir. Sınırı ve yığılma noktaları kümesi ise boş kümedir. Küme bir den fazla nokta bulundurduğundan çapı 1 olacaktır.

**Soru 5)**  $(X,d)$  bir metrik uzay olsun. Her  $x,y \in X$  için  $m(x,y) = |d(x,y)|$  şeklinde tanımlanan  $m$  metriğine göre  $X$  bir metrik uzay olur mu? İnceleyiniz.

$d$  bir metrik olup  $d(x,y) \geq 0$  olduğundan  $|d(x,y)| = d(x,y)$  olacağı açıktır. O halde  $m(x,y) = d(x,y)$  olup  $m$  de  $X$  üzerinde bir metrik olur.

**Not:** Süre 60 dakikadır. Başarılar. İNC