MAT 3008 TOPOLOJİ ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:…CEVAP ANAHTARI.......... **24.07.2007**

No :...

Soru 1) $\tau = \{\phi, \mathbf{R}, A_i = (i,\infty) : i \text{ bir irrasyonel sayı}\}$ ailesinin **R** reel sayılar kümesi üzerinde bir topoloji olup olmadığını belirleyiniz.

T3) aksiyomunda sorun çıkar ve bu bir topoloji değildir. Gerçekten de $A_i = (i,\infty)$ aralıklarını $i > 1$ olacak şekilde seçersek bunların birleşimi $(1,\infty)$ aralığını verir ki 1 bir irrasyonel sayı olmadığından bu birleşim topolojide kalmaz. Yani τ bir topoloji değildir.

Soru 2) $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu boş olmayan bir X kümesinden (Y,ρ) topolojik uzayına olsun. Ayrıca τ, Y'nin açık alt kümelerinin ters resimlerinin ailesi olsun. Yani $\tau = \{f^{-1}(U) : U \in \rho\}$ olsun. τ'nun X üzerinde bir topoloji olup olmadığını belirleyiniz.

T1, T2 ve T3 aksiyomları kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla bu uzay bir topolojik uzaydır.

Soru 3) Sonlu bir X kümesi üzerindeki sonlu tümleyenler topolojisinin X üzerindeki ayrık topoloji olduğunu gösteriniz.

X sonlu olduğundan her bir küme ve tümleyeni de sonludur. Ayrıca boşküme de sonlu olup topolojidedir. Dolayısıyla her bir küme topolojinin elemanıdır ki bu da topolojinin aslında ayrık topoloji olduğunu gösterir.

Soru 4) $X = \{a,b,c\}$ üzerinde $\tau = \{\phi,X,\{a\},\{a,b\},\{c\},\{a,c\}\}$ topolojisi, $Y = \{x,y,z\}$ üzerinde $\rho = \{\phi,Y,\{x\},\{y,z\}\}$ topolojileri veriliyor. $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu $f(a) = y$, $f(b) = x$, $f(c) = y$ şeklinde tanımlansın. f sürekli midir? Açıklayınız.

f altında ρ topolojisindeki açıkların ters görüntülerinin τ topolojisinde bulunmaları gerekir. Ancak $f^{-1}(\{x\}) = \{b\}$ olup $\{b\}$ kümesi τ topolojisinde bulunmadığından f sürekli değildir.

Soru 5) $X = \{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\phi,X,\{a\},\{a,b\},\{c,d\},\{a,c,d\}\}$ topolojisi veriliyor. (X,τ) bir Hausdorff uzayı mıdır?

Hausdorff uzayı olabilmesi için her farklı nokta çiftinin ayrık açık komşuluklarının olması gerekir. Topolojide komşuluklar topolojinin elemanlarıdır. Örneğin a ile c noktalarını alırsak a'yı bulunduran açıklar X, {a}, {a,b} ve {a,c,d} olup c'yi bulunduranlar X, {c,d} ve {a,c,d}'dir. $\{a\} \cap \{c,d\} = \phi$ olup a ile c noktalarının kesişmeyen birer komşulukları mevcuttur. c ile d noktalarını alırsak c'yi bulunduran açıklar X, {c,d} ve {a,c,d}; d'yi bulunduranlar X, {c,d} ve {a,c,d} olacağından c'yi ve d'yi bulunduran ve kesişmeyen iki açık küme bulunamaz. O halde bu uzay bir Hausdorff uzayı değildir.

Not: *Süre 70 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***