

Ad-Soyad:.....

No :.....

**Soru 1)**  $G$  bir grup ve  $N$  bir normal altgrup olsun. Her  $a \in G$  için

$$f : G \rightarrow G/N$$

$$a \rightarrow Na$$

dönüşümünün çekirdeğini hesaplayınız.

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{a \in G : f(a) = N = Ne\} \\ &= \{a \in G : Na = N\} \\ &= \{a \in G : a \in N\} \\ &= N \end{aligned}$$

olur. Burada " $Na = N \Leftrightarrow a \in N$ " özelliği kullanılmıştır.

**Soru 2)**  $S_n/A_n$  bölüm grubunu belirleyiniz. Bu bölüm grubu hangi gruba izomorfiktir. İzomorfizmi tanımlayınız.

$S_n/A_n$  bölüm grubunun eleman sayısı 2 olduğundan 2 koset vardır ve  $S_n/A_n = \{A_n, S_n - A_n\}$  olarak yazılabilir. O halde bölüm grubu 2 elemanlı  $C_2$  grubuna izomorfiktir. İstenen izomorfizm  $C_2 \cong \{a, e\}$  olmak üzere

$$\begin{aligned} f : C_2 &\rightarrow S_n/A_n \\ a &\rightarrow S_n - A_n \\ e &\rightarrow A_n \end{aligned}$$

olarak tanımlanabilir.

**Soru 3)** İndeksi 5 olan bir altgruba sahip bir sonsuz grup örneği veriniz ve alt grubunu belirtiniz.

$\mathbb{Z}$  tamsayılar grubunda  $5\mathbb{Z}$  alt grubunun indeksi 5'tir.

**Soru 4)**  $S_7$  simetrik grubunun  $(1\ 2)(3\ 5\ 7)$  elemanı tarafından üretilen alt grubunu elde ediniz.

$$[(1\ 2)(3\ 5\ 7)]^2 = (3\ 7\ 5)$$

$$[(1\ 2)(3\ 5\ 7)]^3 = (1\ 2)$$

$$[(1\ 2)(3\ 5\ 7)]^4 = (3\ 5\ 7)$$

$$[(1\ 2)(3\ 5\ 7)]^5 = (1\ 2)(3\ 7\ 5)$$

$$[(1\ 2)(3\ 5\ 7)]^6 = e$$

olduğundan bu elemanın mertebesi 6'dır. Üretilen grup ya  $C_6$  ya da  $S_3$  olabilir. Ancak bu elemanın ürettiği grup değişmeli olduğundan  $S_3$  olamaz.  $C_6$ 'dır.

**Soru 5)**  $G$  ve  $G'$  iki grup ve  $f : G \rightarrow G'$  bir epimorfizm olsun.  $G$  nin her  $N$  normal alt grubunun  $f$  altındaki görüntüsünün  $G'$  grubunda normal olduğunu gösteriniz.

$f$  örten olduğundan  $f(G) = G'$  olur. Teorem gereği  $f$  bir homomorfizm olsaydı  $N$  normal alt grubunu  $f(G)$  görüntüsünün bir normal alt grubuna götürecekti. Burada  $f(G) = G'$  olduğu verildiğinden  $N, G'$  grubunun bir normal alt grubuna gidecektir. (ispatı da verebilirsiniz).