MAT 3035 METRİK UZAYLAR II ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:…CEVAP ANAHTARI **02.08.2007**

No :..

Soru 1) Bir metrik uzayda yakınsak bir dizinin limitinin tek olduğunu gösteriniz. Böyle bir dizinin yığılma noktaları hakkında ne diyebiliriz?

Tersine (x_n) dizisinin a ve b gibi iki noktaya yakınsadığını varsayalım. Dolayısıyla, verilen her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık, her $n \geq n_1$ için $d(x_n,a)< \varepsilon/2$ olacak biçiminde bir $n_1\in\mathbf{N}$ ve her $n \geq n_2$ için $d(x_n,b)< \varepsilon/2$ olacak biçiminde bir $n_2\in\mathbf{N}$ vardır. Eğer $n_o = \max\{n_1,n_2\}$olarak seçilirse, her $n \geq n_0$ için

$$d(a,b) \leq d(a,x_n) + d(x_n,b) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

elde edilir, $\varepsilon>0$ sayısı keyfi olduğundan $d(a,b) = 0$ ve dolayısıyla $a = b$ dir.

Soru 2) $f:X_d \rightarrow Y_m$ bir eşmetri ise $f^{-1}:Y_m \rightarrow X_d$ nin de bir eşmetri olduğunu gösteriniz.

f : Xd → Ym bir eşmetri ise her a, b ∈ X için d(a,b) = m(f(a),f(b)) demektir. f-1 in eşmetri olması için her c, d ∈ Y için m(c,d) = d(f-1(c),f-1(d)) olması gerekir. c=f(a) ve d=f(b) alınırsa bu son eşitlik m(f(a),f(b)) = d(f-1(f(a)),f-1(f(b))) halini alır ki bu da m(f(a),f(b)) = d(a,b) olup olmadığı anlamına gelir. Bu ise f eşmetri olduğundan zaten doğrudur.

Soru 3) (X,d) ayrık metrik uzay ve Y boş olmayan bir altküme ise Y tam uzay olur mu? Açıklayınız.

Ayrık metrik uzaydaki her kümenin hem açık hem de kapalı olduğunu biliyoruz. Aynı zamanda ayrık metrik uzay tam uzaydır. Tam uzaylarda sadece kapalı altuzayların tam olduğu sonucuna göre boş olmayan her altküme kapalı olacağından aynı zamanda tam da olur.

Soru 4) X = [0,1] üzerinde ayrık metrik olsun. A = {1, ¼, 1/9, 1/16, ...} kümesinin kompakt olup olmadığını açıklayınız.

Ayrık metrik uzayda bir noktanın 1 yarıçaplı açık komşuluğu sadece merkezdeki noktadan oluşacağından,

A = {D(1/n2, 1) : n = 1, 2, 3, ...}
= {{1}, {1/4}, {1/9}, ...}

ailesi A kümesinin bir açık örtüsüdür. Ancak bu örtünün hiçbir sonlu alt örtüsünün bulunamayacağı açıktır. O halde A kompakt değildir.

Soru 5) Sürekli bir fonksiyon açık kümeleri açık kümelere götürmek zorunda mıdır? Örnekle açıklayınız.

Hayır. Örneğin f: R → R, f(x) = c sabit fonksiyonu R üzerindeki metrik uzaylar ne olursa olsun sürekli olduğu halde, açık kümeleri {c} tek nokta kümesine götürür ki bu da kapalıdır.

Not: *Süre 60 dakikadır. Başarılar.* ***İNC***