

MAT3014 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ II FİNAL SORULARI

Ad-Soyad:...CEVAP ANAHTARI

14.08.2007

No :.....

Soru 1) A_3 alterne grubunun S_4 simetrik grubundaki indeksini hesaplayınız.

A_3 alterne grubunun her bir elemanı 3 elemanın bir çift permütasyonudur. Bu eleman aynı zamanda S_3 simetrik grubunun da bir elemanıdır. $3 < 4$ olduğundan S_3 , S_4 'ün bir alt grubudur. Yani A_3 , S_4 'ün bir normal alt grubudur. $|S_4| = 4! = 24$ ve $|A_3| = 3!/2 = 3$ olduğundan aranan indeks $24/3 = 8$ olarak bulunur.

Soru 2) Her mertebeden bir değişmeli grup bulunabilir mi? Açıklayınız.

Her mertebeden bir devirli grup vardır. Devirli gruplar değişmeli olduğundan her mertebeden bir değişmeli grup ta bulunabilir.

Soru 3) a ile üretilen 24 mertebeli devirli grupta a^9 elemanının ürettiği altgrupla bölüm grubunu elde ediniz.

$\langle a^9 \rangle \cong C_{24/(24,9)} \cong C_8$ olacağından aranan bölüm grubu $C_{24}/C_8 = C_3$ olur.

Soru 4) $f: G \rightarrow H$ bir homomorfizm olsun.

$$A = \{y \in H : \text{belli bir } x \in G \text{ için } y = f(x)\}$$

kümesinin H 'in bir alt grubu olduğunu gösteriniz.

$y_1, y_2 \in A$ olsun. O halde x_1 ve x_2 elemanları $y_1 = f(x_1)$ ve $y_2 = f(x_2)$ olacak şekilde bulunabilirler. $y_1 y_2^{-1} \in A$ olduğunu göstermeliyiz. Denk olarak öyle bir $x \in G$ elemanı bulmalıyız ki $f(x) = y_1 y_2^{-1}$ olsun. $x_1 x_2^{-1} \in G$ nin bir elemanı olmak üzere f bir homomorfizm olduğundan $f(x_1 x_2^{-1}) = f(x_1) f(x_2^{-1}) = f(x_1) f(x_2)^{-1} = y_1 y_2^{-1}$ olur ki bu da $y_1 y_2^{-1} \in A$ olduğunu gösterir.

Soru 5) $D_3 \cong \{a, b \mid a^3 = b^2 = (ab)^2 = e\}$ dihedral grubunda $x = a$ ile $y = ab$ elemanlarının kamutatörünü en sade şekliyle hesaplayınız.

x ile y elemanlarının kamutatörü $xyx^{-1}y^{-1}$ şeklindedir. O halde

$$xyx^{-1}y^{-1} = a \cdot ab \cdot a^{-1} \cdot (ab)^{-1}$$

yazılabilir. $(ab)^2 = e$ olduğundan $ab = ba^{-1}$ yazılırsa aranan kamutatör

$$xyx^{-1}y^{-1} = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b^{-1} \cdot a^{-1}$$

ve $a^3 = e$, $b \cdot b^{-1} = e$ olduğundan bu son eleman a^{-1} olur.

Not: Süre 60 dakikadır. Başarılar. **İNC**