

## MAT 3035 METRİK UZAYLAR II ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:...CEVAP ANAHTARI.....

29.11.2007

No :.....

**Soru 1)** Sürekli bir fonksiyonun düzgün sürekli olması gerekir mi? Açıklayıp örnek veriniz.

Bir  $f$  fonksiyonunun sürekli olması onun düzgün sürekli olmasını gerektirmez.

Örneğin,  $X = \{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \}$  ve  $Y = \mathbb{N}$  üzerinde alışılmış metriklerin olduğunu varsayalım.

$f : X \rightarrow Y$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$  biçiminde tanımlanan  $f$  fonksiyonu,  $Y$  ve  $X$ 'in her alt kümesi indirgenmiş metriğe göre açık olduğundan ve dolayısıyla açıkların ters görüntüleri hep açık olduğundan sürekli, ancak  $f$  fonksiyonu düzgün sürekli değildir.

**Soru 2)**  $f: X_d \rightarrow Y_m$  bir homeomorfizm ise  $f$  ve  $f^{-1}$  fonksiyonları açıkları açıklara götürür mü? Açıklayınız.

Bir homeomorfizmin hem kendi hem de tersi sürekli. Kendi sürekli olduğundan  $f^{-1}$  açıkları açıklara götürür (yani  $f$  altında açıkların ters görüntüsü açıktır). Ters sürekli olduğundan da  $f$  açıkları açıklara götürür.

**Soru 3)** Alışılmış irrasyonel sayılar kümesinin tamlığını inceleyiniz.

$a_n = 1/\sqrt{n}$  (veya benzeri bir dizi) alınırsa bu bir Cauchy dizisidir ve elemanları irrasyoneldir. Ancak limiti 0 olup rasyoneldir. O halde irrasyonel sayılar kümesi alışılmış metriğe göre tam değildir.

**Soru 4)** Bir tam uzayda her  $A$  kümesinin kapanışının da indirgenmiş metriğe göre tam olup olmayacağını tartışınız.

Bir tam uzayın kapalı alt uzayları tam olduğundan ve her kümenin kapanışı da kapalı bir küme olduğundan kapanış kümesi her zaman bir tam alt uzay oluşturur.

**Soru 5)** Ayırık metrik uzayda hangi kümelerin kompakt olduğunu açıklamalı olarak belirleyiniz.

Ayrık metrik uzayda tek nokta kümeleri açıktır (aynı zamanda kapalıdır da). Dolayısıyla sonsuz ögeli bir  $A$  kümesinin bir örtüsü de tek tek her bir  $a \in A$  noktasının oluşturduğu  $\{a\}$  kümelerinden oluşmaktadır. Bu örtünün sonlu bir alt örtüsünü aldığımızda bazı  $\{a\}$  açık kümelerini almamış oluruz ki bu da  $A$  kümesinin bazı elemanlarının ve sonuçta  $A$  kümesinin örtülemeyeceğini gösterir. Dolayısıyla ayırık metrik uzayda sonsuz kümeler kompakt olamaz. Sonlu kümeler her metrik uzayda olduğu gibi kompakttırlar.

**Not:** Süre 60 dakikadır. Başarılar. İNC