MAT 3013 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ I 2.ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:....CEVAP ANAHTARI.. **13.12.2007**

No :...

Soru 1) 8100'den küçük olup 2700 ile aralarında asal olan pozitif tamsayıların sayısını bulunuz.

$\varphi(2700) = \varphi(2^2.3^3.5^2) = 2.18.20 = 720$ olup 1'den 2700'e kadar olan sayılardan 720 tanesi 2700 ile aralarında asaldır. O halde 2701 ile 5400 arasında ve 5401 ile 8100 arasında kalan sayılardan da 720'şer tanesi 2700 ile aralarında asal olacaktır. Aranan sonuç 3.720 = 2160 olur.

Soru 2) a bir tek sayı ise q bir tamsayı olmak üzere $a^2 = 8q + 1$ şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

k bir tamsayı olmak üzere a = 2k + 1 olsun. O halde

$$a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 4k(k+1)+1$$

yazılabilir. Burada k ve k+1 sayıları ardışık iki sayı olduğundan mutlaka çift olacaktır. O halde k(k+1) = 2q denilirse $a^2 = 8q + 1$ olduğu görülür.

Aynı soru a'yı 4 modunda düşünerek de çözülebilir.

Soru 3) $2^m + 1$ asal ise m'nin 2'nin bir kuvveti olduğunu gösteriniz.

$p = 2^m+1$ asal olsun ve iddianın tersine m, 2'nin bir kuvveti olmasın. O halde belli bir q > 1 tek sayısı için $m = 2^n q$ yazılabilir. Bu durumda p,

$$p = 2^m + 1 = (2^{2^n} + 1)\left((2^{2^n})^{q-1} - \dots + 1\right)$$

şeklinde birden büyük olan iki çarpana ayrılabilir. Yani p asal olamaz. Bu ise bir çelişkidir.

Soru 4) $x^2 \equiv 3\ (6)$ ve $x^3 \equiv 3\ (5)$ kongrüans sisteminin genel çözümünü bulunuz.

İlk kongrüansın tek çözümü $x^2 = 9$ (6) dan x = 3 (6) bulunur. x = 3 + 6k, k tamsayı, konulursa ikinci kongrüans

$$(3+6k)^3 = 3\ (5)$$

haline gelir. O halde

$$27 + 162k + 324k^2 + 216k^3 = 3\ (5)$$

ve

$$4 + 2k + 4k^2 + k^3 = 0\ (5)$$

bulunur. k = 0, 1, 2, 3, 4 değerleri denendiğinde sadece k = 4 (5) değerinin bir çözüm olduğunu görürüz. O halde

$$x = 3 + 6k = 3 + 6(4+5m)$$
$$= 27 + 30k$$

elde edilir.

Soru 5) $p \equiv 3\ (4)$ ise p'den küçük olan tüm tek tamsayıların çarpımının p modunda 1 veya –1 olduğunu gösteriniz.

k bir tamsayı olmak üzere p = 4k+3 olsun. Aranan çarpım

$$1.3.5.7. \dots . (4k-1).(4k+1)$$

olur. Burada 4k+1 = p-2, 4k-1 = p-4, vs olduğundan aynı çarpımı

$$(-1)^{\frac{p-3}{4}}\left(\frac{p-1}{2}\right)!$$

olarak yazabiliriz ki ilk çarpan 1 ya da -1; ikinci de Wilson teoreminin sonucu olarak 1 ya da -1 çıkabileceğinden sonucun da 1 ya da -1 çıkacağı söylenebilir.

Not: Süre 70 dakikadır. Başarılar... İNC