MAT 4061 GALOIS TEORİSİ FİNAL SORULARI

Ad-Soyad :..CEVAP ANAHTARI……….. **09.01.2008**

No :............................

Soru 1) Q üzerinde $\sqrt[3]{2+\sqrt{2i-1}}$ sayısının cebirsel olduğunu gösteriniz ve minimal polinomunu belirleyiniz ($i^2 = -1$).

$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{2i-1}}$ ise $x^3 = 2 + \sqrt{2i-1}$ ve $x^3 - 2 = \sqrt{2i-1}$ olur. Kare alınarak $x^6 - 4x^3 + 4 = 2i - 1$ elde edilir. $x^6 - 4x^3 + 5 = 2i$ yazılırsa $x^{12} - 8x^9 + 26x^6 - 40x^3 + 25 = -4$ olur ve son olarak minimal polinom

$$x^{12} - 8x^9 + 26x^6 - 40x^3 + 29 = 0$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla bu sayı tamsayı katsayılı bir polinomun kökü olduğundan cebirseldir.

Soru 2) Z_{13}'teki birimler nelerdir? Z_{13} cebirsel kapalı mıdır?

Z_{13} bir cisim olduğundan 0 dışındaki tüm elemanlar birer birimdir. Katsayıları 1, 2, 3, …, 12 olan tüm polinomların kökleri yine bu sayılar arasında olmayabileceğinden bu cisim cebirsel kapalı değildir. Örneğin $x^2+2 = 0$ denkleminin bu cisimde kalan bir kökü yoktur.

Soru 3) Bir *R* halkasındaki her asal *I* ideali bir maksimal ideal midir?

Bu ifadenin sadece tersi doğrudur. Örneğin Z[x] polinom halkasında (x) asal idealdir ama maksimal değildir.

Soru 4) Z halkasında (8) idealini açıkça yazınız. Bu bir maksimal ideal midir?

(8) = {8n : n $\in$ Z}'dir. Bu bir maksimal ideal değildir, çünkü (2) ideali (8) idealini kapsayan bir maksimal idealdir.

Soru 5) GF(27)'nın elemanlarını belirleyiniz.

GF(27) = GF(3^3) cisim genişlemesi GF(3) = Z_3 = {0, 1, 2} cisminden bir kübik genişlemeyle elde edilir. 3. dereceden indirgenemeyen bir polinom olarak $x^3 + x^2 + x + 2$ alınır ve bunun bir köküne α denilirse GF(3)'e α katılarak GF(27) elde edilecektir. Yani

GF(27) = $\{a+b\alpha+c\alpha^2 : a, b, c \in GF(3)\}$
= $\{0, 1, 2, \alpha, 1+\alpha, 2+\alpha, \alpha^2, 1+\alpha^2, 2+\alpha^2, \alpha+\alpha^2, 1+\alpha+\alpha^2, 2+\alpha+\alpha^2, 2\alpha+\alpha^2, 1+2\alpha+\alpha^2, 2+2\alpha+\alpha^2, \alpha+2\alpha^2, 1+\alpha+2\alpha^2, 2+\alpha+2\alpha^2, 2\alpha+2\alpha^2, 1+2\alpha+2\alpha^2, 2+2\alpha+2\alpha^2, 2\alpha, 1+2\alpha, 2+2\alpha, 2\alpha^2, 1+2\alpha^2, 2+2\alpha^2\}$ şeklindedir.

Not: *Süre 70 dakikadır. Başarılar.* **İNC**