

MAT 4061 GALOIS TEORİSİ ARASINAV SORULARI

25.11.2008

Ad-Soyad:

No :

Soru 1) Bir R halkasında sadeleştirme kuralları gerçekleşmiyorsa R 'nin bir cisim olamayacağını açıklayınız.

R bir tamlik bölgesi ise R 'de sadeleştirme kuralları geçerlidir. Olmayana ergi metoduyla ($p \Rightarrow q \Leftrightarrow q' \Rightarrow p'$) R 'de sadeleştirme kuralları geçerli değilse R bir tamlik bölgesi olamaz. Dolayısıyla da bir cisim olamaz.

Soru 2) $f(x)$ ya da $g(x)$ sabit olmamak üzere, $R = \mathbb{Z}_9[x]$ 'de $x = f(x)g(x)$ şeklinde bir çarpanlara ayırmanın mümkün olup olmadığını gösteriniz.

$x = f(x)g(x)$ olarak yazılabileseydi çarpım sonucunda sabit terimin 9 modunda 0 olması ve lineer terim dışındaki tüm terimlerin katsayılarının da 9 modunda 0 olması gerekirdi. $x = (\dots + ax + b)(\dots + cx + d) = \dots + acx^2 + (ad + bc)x + bd$ yazılabilir. $ac, 9$ modunda 0 olacağından $a = c = 3$ veya $a = c = 6$ olabilir. Her iki durumda da $(ad + bc)x = 3(d + b)x$ olup $3(d + b), 9$ modunda 1 olmalıdır. Bu da mümkün değildir.

Soru 3) \mathbb{Z}_{17} cismindeki birimleri ve bu birimlerin terslerini belirleyiniz.

\mathbb{Z}_{17} bir cisim olduğundan 0 dışındaki tüm elemanların birer birim olduğunu, yani terslerinin var olduğunu biliyoruz. $1^{-1} = 1, 2^{-1} = 9, 3^{-1} = 6, 4^{-1} = 13, 5^{-1} = 7, 6^{-1} = 3, 7^{-1} = 5, 8^{-1} = 15, 9^{-1} = 2, 10^{-1} = 12, 11^{-1} = 14, 12^{-1} = 10, 13^{-1} = 4, 14^{-1} = 11, 15^{-1} = 8$ ve $16^{-1} = 16$ 'dır.

Soru 4) \mathbb{Z} tamsayılar halkasında iki temel idealin kesişiminin bir temel ideal olup olmayacağını tartışınız.

\mathbb{Z} 'deki tüm idealler temel idealdir, yani bir tek eleman tarafından üretilebilirler. I böyle bir ideal ise $a, b \in I$ ve $r \in \mathbb{Z}$ iken $a-b \in I$ ve $ra \in I$ olduğunu biliyoruz.

I_1 ve I_2 bu şekilde iki ideal olsun. $I = I_1 \cap I_2$ olsun. $a, b \in I$ ve $r \in \mathbb{Z}$ iken $a-b \in I$ ve $ra \in I$ olduğunu göstermeliyiz. $a, b \in I$ olduğundan $a, b \in I_1$ ve $a, b \in I_2$ olur. $a, b \in I_1$ ve $r \in \mathbb{Z}$ iken $a-b \in I_1$ ve $ra \in I_1$ olduğunu ve $a, b \in I_2$ ve $r \in \mathbb{Z}$ iken $a-b \in I_2$ ve $ra \in I_2$ olduğunu biliyoruz. O halde $a-b \in I_1$ ve $a-b \in I_2$ olup $a-b \in I$ olur ve yine $ra \in I_1$ ve $ra \in I_2$ olup $ra \in I$ olur.

Soru 5) $R[x]$ 'in hangi şartlar altında bir cisim olabileceğini tartışınız.

Çok özel polinomlar (sabit gibi) dışında bir çok polinomun çarpımsal tersi tanımlanamayacağı için $R[x]$ hiçbir zaman bir cisim olamaz.

Not: Süre 60 dakikadır. Başarılar. **İNC**