MAT 4061 GALOIS TEORİSİ FİNAL SORULARI

Ad-Soyad: **07.01.2009**

No : ....

Soru 1) F bir cisim olmak üzere F'nin kesir cismi olan Frac(F) kümesini belirleyiniz ve sebebini açıklayınız.

$a, b \in F$ olmak üzere Frac(F), a/b şeklinde yazılabilen tüm elemanlardan oluşur. $a/b = a.b^{-1}$ yazılabileceğinden ve F bir cisim olduğu için $b^{-1} \in F$ olacağından tüm $a.b^{-1} \in F$ olur. Yani Frac(F) = F'dir.

Soru 2) $P(x)=x^5-12x^4+16x^2-30x+k$ polinomunun indirgenemez olduğunu söyleyebilmek için k tamsayısının alması gereken değerleri belirleyiniz.

Eisenstein kriterine göre 12, 16, 30 ve k'yı bölen bir p asalı bulabilirsek ve p^2, k'yı bölmezse polinomun indirgenemediğini söyleyebiliriz. 12, 16 ve 30 sadece 2 ile bölünebildiğinden tek seçenek p = 2'dir. O halde k, 2 ile bölünebilen ancak 4 ile bölünmeyen bir tamsayı olursa polinom indirgenemezdir. Yani a bir tamsayı olmak üzere $k = 4a + 2$ şeklinde bir tamsayıdır.

Soru 3) $x^5 - 10x^4 + 2x - 20 = 0$ polinomunun düşürülmüşünü elde ediniz.

x yerine $x - a_{n-1}/na_n = x-(-10/5).1 = x+2$ yazılırsa, ve gerekli düzenlemeler yapılırsa düşürülmüş polinom $x^5 - 40x^3 - 160x^2 - 238x - 144$ olarak elde edilir.

Soru 4) 9 elemanlı bir cismin elemanlarını elde etmek için kullanılacak herhangi bir minimal polinom bulunuz. Bu elemanları yazınız ve terslerini belirleyiniz.

Bu cisim $GF(3^2)$'dir. Bu cisim ikinci dereceden bir genişleme olduğundan x^2+1 polinomunu seçebiliriz. (bu polinom mod 3'te indirgenemeyen bir polinom olmalıdır, x^2+x+2, x^2+2x+2, $2x^2+2$, $2x^2+x+1$, $2x^2+2x+1$ de alınabilir). Bu polinomun kökleri ise i ve –i'dir. Dolayısıyla GF(9)'un elemanları 0, 1, 2, i, 1+i, 2+i, 2i, 1+2i ve 2+2i'dir. Bunların (0 dışında) tersleri ise sırasıyla 1, 2, 2i, 2+i, 1+i, i, 2+2i, 1+2i'dir. Örneğin 1+i'nin tersini bulmak için $(1+i)(a+ib) = 1$ denklemini mod 3'de çözmek gerekir. Yani $a-b=1$ ve $a+b=0$ denklemlerini mod 3'te çözmeliyiz. Bu da a=2 ve b=1 için sağlanır.

Soru 5) Bir halkada n-inci dereceden bir polinomun kaç kökü olabilir. Örnek veriniz.

Halka aynı zamanda bir cisim ise, polinomun derecesi n olduğunda tam n tane kökü vardır. Örneğin R reel sayılar cisminde n-inci dereceden bir polinomun en çok n kökü olduğu cebirin temel teoremi olarak bilinir.
Halka cisim özelliklerine sahip değilse kök sayısı n den fazla olabilir. Örneğin Z_{12} halkasında $x^2-1 = 0$ polinomunun 1, 5, 7 ve 11 olmak üzere dört kökü vardır.

Not: *Süre 70 dakikadır. Başarılar.* **İNC**