

MAT3014 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad :

22.04.2009

No:

Soru 1) “ G grubu değişmelidir $\Leftrightarrow f:G \rightarrow G, f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı f dönüşümü bir homomorfizmdir”. Gösteriniz.

(\Rightarrow) G değişmeli olsun.

$f(x.y) = (x.y)^2 = x.y.x.y = x^2.y^2 = f(x).f(y)$ olup f bir homomorfizmdir.

(\Leftarrow) f bir homomorfizm olsun.

$$f(x.y) = (x.y)^2 = x.y.x.y = f(x).f(y) = x^2.y^2$$

olduğundan $x.y = y.x$ olur. Yani G grubu değişmelidir.

Soru 2) $Z_{16}^* = \{x \in Z_{16} \mid (x, 16) = 1\}$ çarpım grubunun biri devirli diğeri devirli olmayan 4. mertebeden iki altgrubunu bulunuz.

$Z_{16}^* = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ olup $3^2 = 9, 3^3 = 11, 3^4 = 1$ olduğundan $\langle 3 \rangle = \{1, 3, 9, 11\}$ alt grubu Z_{16}^* 'nin 4 mertebeli devirli bir alt grubudur.

$H = \{\pm 1, \pm 9\}$ kümesi Z_{16}^* 'nin 4 elemanlı bir alt kümesi olup bir grup oluşturduğundan ve bir tek eleman tarafından üretilmediğinden H, Z_{16}^* 'nin devirli olmayan 4. mertebeden bir alt grubudur.

Soru 3) Değişmeli bir grupta tersi kendisine eşit olan elemanların oluşturduğu altkümenin bir altgrup olup olmadığını gösteriniz.

H, G değişmeli grubunda tersi kendisine eşit olan elemanların kümesini gösterebiliriz. Yani $a \in H$ olması demek $a = a^{-1}$ olması demektir. Bu da $a^2 = e$ olduğu anlamına gelir.

$a, b \in H$ olsun. $ab^{-1} \in H$ olduğunu göstermeliyiz. Yani $(ab^{-1})^2 = e$ olduğunu ya da $(ab^{-1})^{-1} = ab^{-1}$ olduğunu göstermeliyiz. İlkin gösterelim.

$$\begin{aligned} (ab^{-1})^2 &= (ab^{-1})(ab^{-1}) \\ &= abab, \quad b \in H \text{ olup } b = b^{-1} \text{ olduğundan;} \\ &= aabb, \quad G \text{ değişmeli olduğundan;} \\ &= a^2b^2 \\ &= e.e \\ &= e \end{aligned}$$

olup $H < G$ bulunur.

Soru 4) $S_3 \cong \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$ grubunun kamutator altgrubunu hesaplayınız.

Kamutator altgrubu $x, y \in S_3$ olmak üzere $xyx^{-1}y^{-1}$ şeklindeki elemanlardan oluşur. O halde x ve y olarak yukarıdaki 6 elemandan herhangi ikisini seçerek tüm mümkün olan 36 kamutator elemanını belirleyebiliriz. Bunlardan S_3 'de olmayanları $a^3 = b^2 = (ab)^2 = e$ bağıntılarını kullanarak S_3 'deki elemanlara dönüştürmeliyiz. Burada $(ab)^2 = e$ bağıntısı $ab = ba^{-1} = ba^2$ olarak da kullanılabilir.

Örneğin $x = a$ ve $y = a^2$ seçersek

$$xyx^{-1}y^{-1} = aa^2a^{-1}a^{-2} = e;$$

$x = a$ ve $y = b$ seçersek

$$xyx^{-1}y^{-1} = aba^{-1}b^{-1} = aabb^{-1} = a^2;$$

$x = a^2$ ve $y = b$ seçersek

$$xyx^{-1}y^{-1} = a^2ba^{-2}b^{-1} = a^2aba^{-1}b^{-1} = ba^{-1}b = abb = a \text{ elde edilir.}$$

Diğerleri denendiğinde sonuçta kamutator altgrubu $S_3' = \{e, a, a^2\}$ olarak bulunur. Bu da A_3 alterne grubudur.

Soru 5) G bir grup olmak üzere

$M(G) = \{g \in G : \text{her } x \in G \text{ için } gx = xg\}$ kümesi G 'nin merkezi olarak adlandırılır. $M(C_{12})$ altgrubunu hesaplayınız.

$C_{12} = \{a, a^2, a^3, a^4, \dots, a^{11}, a^{12} = e\}$ olsun. O zaman herhangi bir $g \in G$ için $g = a^k$ şeklindedir. $x = a^t$ olsun. $gx = a^ka^t = a^{k+t}$ ve $xg = a^ta^k = a^{t+k}$ olacaktır. Yani $gx = xg$ eşitliği her zaman sağlanacaktır. Dolayısıyla $M(C_{12}) = C_{12}$ olur.

Not: Süre 70 dakikadır. Başarılar. İNC