

# MAT3014 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ FINAL SORULARI

Ad-Soyad :...CEVAP ANAHTARI...

07.06.2010

No:.....

**Soru 1)**  $C_{12} \cong \langle a \mid a^{12} = e \rangle$  grubunun kamutatör altgrubunu hesaplayınız.

$C_{12}$  grubu değişmeli olduğundan ve değişmeli bir grupta tüm kamutatörler etkisiz elemana eşit olduklarından kamutatör altgrubu  $\{e\}$  olur.

**Soru 2)**  $Z_n$  halkası bir cisim değilken  $n$  sayısının asal olamayacağını gösteriniz.

Olmayana ergi metodunu kullanacağız.  $n = p$  asal olsun. İlk olarak  $Z_p$ 'nin sıfır bölensiz olduğunu göstermeliyiz (yani bir tamlık bölgesi olduğunu).  $a$  sıfırdan farklı bir eleman olsun ve  $a \cdot b = 0$  olduğunu varsayalım.  $p$  asal olduğundan bu  $ab \equiv 0 \pmod{p}$  anlamına gelir. Yani  $p \mid ab$  olur.  $p$  asal olduğundan ve  $p$ ,  $a$ 'yı bölmeyecek şekilde alındığından  $p$ ,  $b$ 'yi bölmek zorundadır. Bu da  $b \equiv 0 \pmod{p}$  anlamına gelir. Yani sıfır bölen yoktur. O halde  $Z_p$  bir tamlık bölgesidir. Her sonlu tamlık bölgesi bir cisim olduğundan  $Z_p$  bir cisimdir.

**Soru 3)**  $G$  bir grup olmak üzere

$M(G) = \{g \in G : \text{her } x \in G \text{ için } gx = xg\}$  kümesi  $G$ 'nin merkezi olarak adlandırılır.  $M(D_5)$  grubunu hesaplayınız.

$D_5 \cong \langle a, b \mid a^5 = b^2 = (ab)^2 = e \rangle$  olduğundan merkez tanımına uyan tek eleman  $e$ 'dir. Dolayısıyla  $M(D_5) = \{e\}$ 'dir.

**Soru 4)** Bir  $R$  halkasında her  $a, b \in R$  için  $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$  özdeşliği geçerli midir? Açıklayınız.

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b) \\ &= (a^2+ab+ba+b^2)(a+b) \\ &= a^3+a^2b+aba+ab^2+ba^2+bab+b^2a+b^3 \end{aligned}$$

olup halka değişmeli değilken bu ifade istenen ifadeden farklıdır. Sadece değişmeli bir halkada istenen özellik sağlanır.

**Soru 5)**  $Z_{24}$  çarpımsal devirli grubunda tüm elemanların mertebelerini ve terslerini belirleyiniz.

Eleman	mertebesi	tersi
$a$	24	$a^{23}$
$a^2$	12	$a^{22}$
$a^3$	8	$a^{21}$
$a^4$	6	$a^{20}$
$a^5$	24	$a^{19}$
$a^6$	4	$a^{18}$
$a^7$	24	$a^{17}$
$a^8$	3	$a^{16}$
$a^9$	8	$a^{15}$
$a^{10}$	12	$a^{14}$
$a^{11}$	24	$a^{13}$
$a^{12}$	2	$a^{12}$
$a^{13}$	24	$a^{11}$
$a^{14}$	12	$a^{10}$
$a^{15}$	8	$a^9$
$a^{16}$	3	$a^8$
$a^{17}$	24	$a^7$
$a^{18}$	4	$a^6$
$a^{19}$	24	$a^5$
$a^{20}$	6	$a^4$
$a^{21}$	8	$a^3$
$a^{22}$	12	$a^2$
$a^{23}$	24	$a$
$e$	1	$e$

**Not:** Süre 70 dakikadır. Başarılar. İNC