MAT 3013 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ I ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:... **21.07.2010**

No :...

Soru 1) a ve b tek tamsayılar ise a^2+b^2 toplamının bir tam kare olamayacağını gösteriniz.

a = 2n+1 ve b = 2m+1 (m,n tamsayı) olsun.

$$a^2+b^2 = (2n+1)^2+(2m+1)^2 = 4(n^2+m^2+n+m)+2$$

olur. Yani a^2+b^2 toplamının 4 ile bölümünden kalan 2 olur. Ancak bir sayının karesinin 4 ile bölümünden kalanın sayı tek ise 1; çift ise 0 olduğu bilindiğinden hiç bir zaman bir sayının karesinin 4 ile bölümünden kalan 2 olamaz.

Soru 2) $2x + 7y \equiv 5 \quad (12)$ kongrüansının çözüm kümesini bulunuz.

(2,12) = 2 olduğundan $2x \equiv 5 - 7y \ (12)$ kongrüansını almak sonuç vermeyeceğinden mecburen $7y \equiv 5 - 2x \ (12)$ kongrüansını ele almalıyız. Bu kongrüans ise

$$7y \equiv 5 - 2x \qquad (12)$$

veya denk olarak

$$7y \equiv -7 + 70x \qquad (12)$$

yazılabileceğinden

$$y \equiv -1 + 10x \qquad (12)$$

ye denktir. O halde çözüm kümesi

Ç = {(0,11), (1,9), (2,7), (3,5), (4,3), (5,1), (6,11), (7,9), (8,7), (9,5), (10,3), (11,1)}

şeklindedir.

Soru 3) İki tam karenin toplamı şeklinde ifade edilebilen bir p tek asal sayısı için $\varphi(p)$'nin 4 ile bölünebildiğini gösteriniz.

Eğer p asal sayısı iki tam karenin toplamı şeklinde ifade edilebilen bir asal sayı ise n bir doğal sayı olmak üzere p = 4n+1 şeklindedir. $\varphi(p) = p-1$ olduğundan $\varphi(p) = (4n+1)-1 = 4n$ olur.

Soru 4) ax+by = a+c denkleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter şartın ax+by = c denkleminin çözülebilir olması olduğunu gösteriniz.

ax+by = c denkleminin çözülebilme şartı (a,b) = d denilirse d|c olmasıdır. Benzer şekilde ax+by = a+c denkleminin çözülebilme şartının da d|(a+c) olduğu bilinmektedir. O halde göstermemiz gereken $d|c \Leftrightarrow d|(a+c)$ ifadesidir. Ancak d = (a,b) olduğundan d|a ve d|b olduğu açıktır. d|c olduğu da hatırlanırsa d|(a+c) olduğu görülür.

Soru 5) (a,m), (b,m) veya (c,m)'den en az biri 1 ise $ax + by + cz \equiv d \quad (m)$ kongrüansının m^2 tane çözümü olduğunu gösteriniz.

(a,m) = 1 olsun. O halde verilen üç değişkenli kongrüansı $ax \equiv d-by-cz \ (m)$ olarak düşünürsek sağ tarafın sabit her bir değeri için bu x'e göre tek değişkenli bir kongrüans olur ve (a,m) = 1 varsaydığımız için birtek çözüme sahiptir. Tabii ki d-by-cz ifadesi, m modunda x ve y'nin herbirisinin m tane farklı değeri olacağından $m.m = m^2$ tane farklı değer alabilir ve bu değerlerin herbirisi için kongrüans bir tek çözüme sahip olacağından toplam m^2 tane çözüme sahip olur.

Not: Süre 70 dakikadır. Başarılar... İNC