

MAT 3013 SOYUT CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:..CEVAP ANAHTARI

31.01.2011

No :.....

Soru 1) $a+3b$ toplamı 7 ile bölünüyorsa $a-4b$ farkının da 7 ile bölünebildiğini gösteriniz.

$a+3b$, 7 ile bölünebiliyorsa k bir tamsayı olmak üzere $a+3b = 7k$ yazabiliriz. $a-4b = a+3b-7b = 7k-7b = 7(k-b)$ yazılabilir ve $k-b$ bir tamsayı olduğundan $a-4b$ farkı da 7 ile bölünebilir.

Soru 2) i) $\varphi(2^k)$ sayısını hesaplayınız.

ii) n ile aralarında asal ve n 'den küçük pozitif doğal sayıların toplamı 128 ise n kaçtır?

i) $\varphi(2^k) = 2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}$ olur.

ii) n ile aralarında asal ve n 'den küçük pozitif doğal sayıların toplamı $n \cdot \varphi(n)/2$ olduğundan $n \cdot \varphi(n)/2 = 128$ olur. Buradan $n \cdot \varphi(n) = 256$ elde edilir. n sayısı 2^7 'yi böleceğinden $n = 2^k$ şeklindedir ve $\varphi(n) = 2^{k-1}$ olur. Yani $2^k \cdot 2^{k-1} = 256$ ve $k = 4$ bulunur. Yani $n = 2^4 = 16$ olur.

Soru 3) p ve q farklı asal sayılar olmak üzere $t((pq)^2) = 217$ ise $p+q$ toplamı kaçtır?

t bir çarpım fonksiyonu olduğundan $t((pq)^2) = t(p^2)t(q^2) = (1+p+p^2)(1+q+q^2) = 217 = 7 \cdot 31$ demektir. Deneme yoluyla $p = 2$ ve $q = 5$ veya $q = 2$ ve $p = 5$ bulunur. Yani $p+q = 7$ 'dir.

Soru 4) İki tamsayının kareleri toplamının 4 modunda 3 olamayacağını gösteriniz.

Çift sayıların kareleri 4 modunda 0'a, tek sayıların kareleri ise 4 modunda 1'e denktir. Dolayısıyla iki tamkarenin toplamı 4 modunda $0+0 = 0$, $0+1 = 1+0 = 1$ veya $1+1 = 2$ olabilir. Olamayacak tek değer 3'tür.

Soru 5) F_n Fibonacci dizisi $F_1 = F_2 = 1$ ve $n > 0$ için $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ ile tanımlanır. Her pozitif k tamsayısı için $5|F_{5k}$ olduğunu gösteriniz.

Tümevarımla ispat yapacağız:

$k = 1$ için $F_5 = 5$ olup 5 ile bölünür.

k için doğru olsun, yani $5|F_{5k}$ olsun. O halde t bir tamsayı olmak üzere $F_{5k} = 5t$ yazabiliriz.

$k+1$ için doğru olduğunu yani $5|F_{5(k+1)}$ olduğunu göstermeliyiz.

$F_{5(k+1)} = F_{5k+5} = F_{5k+4} + F_{5k+3} = (F_{5k+3} + F_{5k+2}) + (F_{5k+2} + F_{5k+1}) = F_{5k+3} + 2F_{5k+2} + F_{5k+1} = (F_{5k+2} + F_{5k+1}) + 2(F_{5k+1} + F_{5k}) + F_{5k+1} = F_{5k+2} + 4F_{5k+1} + 2F_{5k} = (F_{5k+1} + F_{5k}) + 4F_{5k+1} + 2F_{5k} = 5F_{5k+1} + 3F_{5k} = 5F_{5k+1} + 3 \cdot 5t = 5(F_{5k+1} + 3t)$ olup F_{5k+1} de 5 ile bölünür. O halde önerme her n için doğrudur.

Süre 70 dakikadır. Başarılar. inc