

# MAT 3019 SAYILAR TEORİSİ BÜTÜNLEME SORULARI

Ad-Soyad:.....

26.01.2015

No :.....

**Soru 1)**  $n$  bir doğal sayı olmak üzere  $A=6n+5$  şeklindeki her sayının aynı türde bir asal çarpanının bulunduğunu gösteriniz.

$6n+5$  türündeki bir sayının 6 modundaki asal çarpanları  $k$  bir tamsayı olmak üzere ya  $6k+1$  ya da  $6k+5$  formundadır. İddianın tersine tüm çarpanların  $6k+1$  formunda olduğunu varsayarsak bunların çarpımı da aynı formda olur ve  $6n+5$ 'e eşit olamaz. Yani en az bir tane  $6k+5$  türünde asal çarpan olmalıdır.

**Soru 2)** Üç tamsayının kareleri toplamı 4 modunda hangi değerleri alamaz, açıklayınız.

Çift sayıların karesi 4 modunda 0'a; tek sayıların karesi 4 modunda 1'e denktir. Tüm ihtimalleri düşünürsek 3 tam karenin toplamının 0, 1, 2 ve 3 olabileceği görülür. Yani 4 modundaki her değeri alacaktır.

**Soru 3)** Hangi  $n$  doğal sayıları için  $5^n-5$  farkı  $n$  ile bölünebilir? Açıklayınız.

$n = 5$  ise  $5^5-5$  farkı 5 ile bölünür.  $n$ , 5'ten farklı bir asal ise Fermat'ın küçük teoremi gereği  $(5, n) = 1$  olur ve  $5^{n-1} \equiv 1 (n)$  veya denk olarak  $5^n \equiv 5 (n)$  yazılabilir. Bu da  $5^n-5$  farkının  $n$  ile bölünebildiğini gösterir. Son olarak  $n$  asal değilse Euler teoremi gereğince  $(5, n) = 1$  iken  $5^{\phi(n)} \equiv 1 (n)$  olur. Bu da  $5^n-5$  farkıyla ilgili bir bilgi vermeyeceğinden bu farkın  $n$  ile bölünüp bölünmeyeceği açık değildir.

**Soru 4)** Hangi  $n$  tamsayıları için  $2^{2n}-1$  sayısının asal olacağını açıklamalı olarak belirleyiniz.

$2^{2n}-1 = (2^n-1)(2^n+1)$  olup  $2^{2n}-1$  farkının asal olması için bu iki çarpanın birinin 1 olması gerekir. İkinci çarpan 1'den büyük olduğundan ilk çarpan olan  $2^n-1 = 1$  olmak zorundadır. Buradan  $2^n=2$  ve  $n=1$  bulunur.

**Soru 5)** Pozitif bölenlerinin toplamı 465 olan doğal sayıyı belirleyiniz.

$465 = 3 \cdot 5 \cdot 31 = 15 \cdot 31 = 5 \cdot 93 = 3 \cdot 155$  şeklinde düşünülebilir.  $p^n$  şeklindeki her bir asal kuvvet çarpanı için pozitif bölenlerin toplamı

$$\frac{p^{n+1}-1}{p-1} = p^n + p^{n-1} + p^{n-2} + \dots + p^2 + p + 1$$

olacağından yukardaki yazılımlarda  $1+2+4+8+16+\dots$ ,  $1+3+9+27+\dots$ ,  $1+5+25+125+\dots$  gibi toplamlardan uygun olanları seçmeliyiz.  $31 = 1+5+25$  ve  $15 = 1+2+4+8$  olduğundan aranan sayı  $8 \cdot 25 = 200$  olur.

Süre 70 dakikadır. Başarılar. inc