

MAT3020 SOYUT CEBİR BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

Ad-Soyad :CEVAP ANAHTARI.....

12.06.2015

No:

Soru 1) $D_8 \cong \{a, b | a^8 = b^2 = (ab)^2 = e\}$ grubunda $x = a^6 b a^3$ elemanının mertebesini bulunuz.

$(ab)^2 = e$ olup $ab = (ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1} = b a^7$ olduğundan $x^2 = a^6 b a^3 a^6 b a^3 = a^6 b a b a^3 = a^6 b b a^7 a^3 = a^{16} = (a^8)^2 = e$ olduğundan x 'in mertebesi 2 olur. Bu işlem yapmadan x 'in bir yansıma oluşundan da görülür.

Soru 2) C_{30} devirli grubunun C_{10} altgrubuyla bölüm grubu oluşturulabilir mi? Neden? C_{30} grubu a ile üretilebiliyorsa C_{10} altgrubunun üretici ne olabilir?

C_{30} devirli grubu değişmeli olduğundan her alt grubu normaldir ve bölüm grubu oluşturulabilir. C_{10} altgrubu a^3 ile üretilebilir: $(a^3)^2 = a^6$, $(a^3)^3 = a^9$, $(a^3)^4 = a^{12}$, $(a^3)^5 = a^{15}$, $(a^3)^6 = a^{18}$, $(a^3)^7 = a^{21}$, $(a^3)^8 = a^{24}$, $(a^3)^9 = a^{27}$, $(a^3)^{10} = a^{30} = e$ 'dir. Benzer şekilde $(30, k) = 3$ olacak şekilde her bir k sayısı için de a^k , C_{10} 'un bir üretici olur. Yani a^9 , a^{21} ve a^{27} elemanları da birer üreticidir.

Soru 3) Z_{30} toplamsal grubunda $\langle 25 \rangle$ altgrubunun elemanlarını ve bu altgrubun hangi gruba izomorfik olduğunu belirleyiniz. Bu altgrup normal midir?

$\langle 25 \rangle = \{25, 20, 15, 10, 5, 0\}$ olur. Dolayısıyla tek elemanla üretilen ve 6 elemanlı olan bu altgrup C_6 altgrubudur. Z_{30} devirli grup olup değişmelidir ve dolayısıyla her altgrubu normaldir.

Soru 4) $f: G \rightarrow G$, $f(x) = x^2$ bir homomorfizma ise G grubunun değişmeli olduğunu gösteriniz.

$a, b \in G$ için f bir homomorfizma olup $f(ab) = f(a)f(b)$ olur. Yani $(ab)^2 = a^2 b^2$ olur. Buradan $abab = aabb$ ve $ba = ab$ elde edilir ki bu da her a, b için doğru olduğundan G değişmelidir.

Soru 5) $f: Z \rightarrow 3Z$, $f(n) = 6n$ ile tanımlı f fonksiyonunun türünü belirleyiniz ve çekirdeğini hesaplayınız.

f işlem korur, birebirdir ancak örten değildir. Dolayısıyla bir monomorfizmdir. Çekirdeği ise

$$\text{Ker } f = \{n \in Z : 6n = 0\} = \{0\}$$

olur.

Geçmiş olsun...

INC