

MAT3020 SOYUT CEBİR ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad :.....

05.04.2017

No:.....

Soru 1) $G = \{ x \in \mathbb{R} : x > 5 \}$ kümesi üzerinde $a, b \in G$ için

$$a \circ b = ab + 30 - 5(a+b)$$

şeklinde tanımlı işlemin kapalı olduğunu gösteriniz.

$a, b \in G$ olduğundan $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a > 5$ ve $b > 5$ 'dir. $a \circ b$ işleminin kapalı olması için $a \circ b \in \mathbb{R}$ ve $a \circ b > 5$ olmalıdır. İlk iddia aşikârdır.

İkinciye görelim:

$$\begin{aligned} a \circ b &= ab + 30 - 5(a+b) \\ &= (a-5)(b-5) + 5 \end{aligned}$$

olup $a-5 > 0$ ve $b-5 > 0$ olduğundan $a \circ b > 5$ elde edilir. O halde işlem kapalıdır.

Soru 2) Bir G grubunda her x elemanı için $x = x^3 = x^5 = \dots = x^{2n+1}$ ise bu grubun değişmeli olup olmayacağını inceleyiniz.

$x = x^3 = x^5 = \dots = x^{2n+1}$ eşitliğinin $x = x^3$ kısmından $x^2 = e$ elde edilir. Yani G grubundaki tüm elemanların kareleri etkisiz elemana eşittir. a ve b , G 'nin iki elemanı olsun. $ab = ba$ olup olmadığı soruluyor. Verilenlerden $(ab)^2 = e$ yazabiliriz. Buradan $abab = e$ ve $ab = b^{-1}a^{-1}$ elde edilir. $a^2 = e$ ve $b^2 = e$ olduğu bilindiğinden $a = a^{-1}$ ve $b = b^{-1}$ yazılabilir. O halde $ab = ba$ bulunur ki bu da istenen sonuçtur.

Soru 3) Bir G grubunda sol ve sağ kosetler birbirine eşit olmak zorunda mıdır?

Bu ancak altgrubun normal olması durumunda doğrudur. Genelde ise doğru olmayabilir. Örneğin $S_3 \cong \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$ simetrik grubunun $B = \{e, b\}$ altgrubu için aB sol koseti $aB = \{a, ab\}$ ve Ba sağ koseti $Ba = \{a, ba\}$ şeklindedir. $ab = ba^2 \neq ba$ olduğundan $aB \neq Ba$ olur. Başka örneklerde verilebilir.

Soru 4) G sonlu bir grup olsun. Bir $x \in G$ elemanının G 'deki mertebesi $m(x)$ olsun. G grubu değişmeli ise

$$\begin{aligned} f : G &\rightarrow G \\ x &\mapsto x^{m(x)-1} \end{aligned}$$

dönüşümünün bir homomorfizm olduğunu gösteriniz.

x elemanının mertebesi $m(x)$ olduğundan $x^{m(x)} = e$ 'dir. O halde f dönüşümü aslında $x \mapsto x^{m(x)-1} = x^{-1}$ şeklindedir. O halde G grubunun değişmeliliği kullanılarak her $a, b \in G$ için

$$f(ab) = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1} = f(a)f(b)$$

elde edilir, yani G grubu değişmeli iken verilen f dönüşümü bir homomorfizmdir.

Soru 5) a) Bir \ddot{U} ikizkenar üçgeninin

b) Bir Δ çeşitkenar üçgeninin

tüm simetrilerini belirleyiniz.

a) \ddot{U} bir ikizkenar üçgen olsun. \ddot{U} 'nün hiçbir dönme dönüşümü altında aynı kalmayacağı açıktır (360° 'nin katları hariç, bunlar da etkisiz elemandır). \ddot{U} 'nün diğerlerinden farklı olan kenarına çizilen yüksekliği etrafındaki a adını verebileceğimiz yansıma dönüşümü tek yansımadır. O halde \ddot{U} 'nün birisi etkisiz eleman, diğeri bir yansıma olan iki adet simetrisi mevcuttur.

b) Δ bir çeşitkenar üçgen olsun. Δ 'nın etkisiz eleman dışında hiçbir simetrisi olmadığı düşünülürse tek simetri e'dir.

Not: Süre 70 dakikadır. Başarılar. İNC