

MAT 4061 GALOIS TEORİSİ 2.ARASINAV SORULARI

Ad-Soyad:.....CEVAP ANAHTARI.....

15.12.2004

No :.....

Soru 1) F , karakteristiği $p>0$ olan bir cisim olsun. Her $a, b \in F$ için $(a+b)^p = a^p + b^p$ olduğunu gösteriniz.

$$(a+b)^p = a^p + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} a^i b^{p-i} + b^p$$

olup buradaki $\binom{p}{i}$ katsayıları p asal olduğundan p ile bölünmektedir. O halde geriye sadece a^p ve b^p terimleri kalır.

Soru 2) $P(x) = x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 3x + k$ polinomunun indirgenemez olduğunu söyleyebilmek için k tamsayısının alması gereken değerleri belirleyiniz.

Eisenstein kriterine göre 9, 15, 3 ve k 'yi bölen bir p asalı bulabilirsek ve p^2 , k 'yi bölmezse polinomun indirgenemediğini söyleyebiliriz. 9, 15 ve 3 sadece 3 ile bölünebildiğinden tek seçenek $p = 3$ 'tür. O halde k , 3 ile bölünebilen ancak 9 ile bölünmeyen bir tamsayı olursa polinom indirgenemezdir. Yani $(a,3) = 1$ olmak üzere $k = 3a$ şeklinde bir tamsayıdır.

Soru 3) $a \neq \pm 1$ tamkare içermeyen bir sayı ise, her $n \geq 2$ için $x^n - a$ polinomunun $\mathbb{Q}[x]$ 'de indirgenemez olduğunu gösteriniz.

$a \neq \pm 1$ olduğundan a 'yı bölen bir p asalı mevcuttur. Bu p için, a tamkare içermeyen bir sayı olduğundan Eisenstein kuralını uygulayabiliriz ve $x^n - a$ polinomunun indirgenemediğini söyleyebiliriz.

Soru 4) $P(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ polinomunun \mathbb{Q} üzerindeki indirgenebilirliğini inceleyiniz.

$p = 2$ için $x = 1$ bir çözümdür.

$p = 3$ için $x = 0, 1$ ya da 2 bir çözüm olmadığından lineer bir çarpan yoktur. O halde tek ihtimal ikinci dereceden iki çarpan olabilmesidir. Bu durumda

$$x^4 - 10x^2 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

$$= x^4 + (a+c)x^3 + (b+ac+d)x^2 + (ad+bc)x + bd$$

yazılarak $a+c=0$, $b+ac+d=-10$, $ad+bc=0$ ve $bd=1$ elde edilir. $c=-a$ ve $d=1/b$ yazılırsa $b-a^2+1/b=-10$, $a/b-ab=0$ elde edilir. Sonuncuyu $a((1/b)-b)=0$ olarak yazarsak ya $a=0$ ya da $b^2=1$ ve $b=\pm 1$ buluruz. İlk durumda $c=0$ olur ve $b+(1/b)=-10$ elde edilir. $b^2+10b+1=0$ denkleminin tamsayı kökü olmadığından $a=0$ olamaz. $b=\pm 1$ ise $d=\pm 1$ dir. Böylece $a^2=8$ veya 12 olur ki yine tamsayı kök yoktur. Yani bu denklem sisteminin çözümü yoktur. O halde $P(x)$ indirgenemezdir.

Soru 5) 9 elemanlı bir cismin elemanlarını yazınız.

$9=3^2$ olup 9 elemanlı bir cisim, asal cismi olan \mathbb{Z}_3 'e ikinci dereceden indirgenemeyen bir polinomun α gibi bir kökünü katarak elde edilir. Yani

$\text{GF}(9) = \{0, 1, 2, \alpha, 1+\alpha, 2+\alpha, 2\alpha, 1+2\alpha, 2+2\alpha\}$ şeklindedir.

Not: Süre 70 dakikadır. Başarılar. **İNC**

