

MAT 4100 GALOIS TEORİSİ FINAL SORULARI

Ad-Soyad:..CEVAP ANAHTARI

13.06.2024

No :.....

Soru 1) $3x^4 - 14x^3 + 21x^2 + ax + b$ polinomunun Eisenstein kriterine göre \mathbb{Q} üzerinde indirgenemez olabilmesi için a ve b hakkında neler söylenebilir? (20 puan)

Öncelikle 14, 21, a ve b sayılarının tümünü bölen bir asal sayı bulabilmeliyiz ki bu ancak 7 olabilir. Ayrıca 7, 3'ü bölmemeli ve sabit terim, 7'nin karesi 49 ile bölünmemelidir. O halde a ve b , 7 ile bölünebilmeli, b ise 49 ile bölünmemelidir.

Soru 2) $x^4 - 4ax^3 + 10x^2 - 15x + 110$ polinomunun düşürülmüş polinomunda ikinci dereceden terimin katsayısı 4 ise a kaçtır? (20 puan)

Bu polinomu düşürmek için kullanılacak dönüşüm x yerine $x + (4a/4) = x + a$ yazılmasıdır. İşlemler yapıldığında x^2 'nin katsayısı $10-6a^2$ olur. Böylece $10-6a^2 = 4$ denklemden $a = 1$ veya -1 olmalıdır.

Soru 3) $GF(9)$ cisminin elemanlarını belirleyerek bu cisimdeki elemanların terslerini bulunuz. (20 puan)

$GF(9) = GF(3^2)$ olduğundan $GF(3) = \mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$ cismi üzerinden ikinci dereceden indirgenemez bir polinom yardımıyla bir genişleme yapılmalıdır. x^2+1 polinomu \mathbb{Z}_3 üzerinde indirgenemezdir. Bir köküne α dersek $\alpha^2 = -1$ olur. $GF(9)$ 'un elemanları $GF(9) = \{0, 1, 2, \alpha, \alpha+1, \alpha+2, 2\alpha, 2\alpha+1, 2\alpha+2\}$ olur. $1^{-1} = 1$, $2^{-1} = 2$, $\alpha^{-1} = 1/\alpha = -\alpha^2/\alpha = -\alpha = 2\alpha$, $(\alpha+1)^{-1} = \alpha+2$ ve $(2\alpha+1)^{-1} = 2\alpha+2$ bulunur.

Soru 4) Bir $P(x)$ polinomu x yerine $x-2$ dönüşümü yapılarak $x^3 - 6x - 14$ polinomuna düşürülmüştür. $P(x)$ polinomunu bulunuz. (20 puan)

Düşürülme işlemi x yerine $x-2$ konularak yapıldıysa başlangıçtaki polinomu bulmak için x yerine $x+2$ konulur. $(x+2)^3 - 6(x+2) - 14 = x^3 + 6x^2 + 6x - 18$ polinomu aranan $P(x)$ polinomudur.

Soru 5) $x^4 - 12x^3 + 20x^2 - 10x + 36 = 0$ denkleminde köklerin ikerli çarpımlarının toplamını elde ediniz. (20 puan)

Baş katsayısı 1 olan dördüncü dereceden bir denkleminde köklerin ikerli toplamı x^2 'li terimin katsayısıdır, yani 20.

Not: Süre 40 dakikadır. Başarılar. İNC